A24

(a) Es gilt $\alpha : I \to G$, $\beta : I \to G$ sind stetig $\Rightarrow \gamma : I \to G \times G$ ist stetig
$t \mapsto (\alpha(t), \beta(t))$

$\Rightarrow \alpha \cdot \beta : I \to G$ ist $\alpha \cdot \beta \overset{A18}{=} m \circ \gamma$ ist stetig

$\Rightarrow \underbrace{\alpha(0) \cdot \beta(0)}_{(\alpha \cdot \beta)(0)} = e = \underbrace{\alpha(1) \cdot \beta(1)}_{(\alpha \cdot \beta)(1)}$

(b) $\alpha \circ \beta = (\alpha \circ \varepsilon) \cdot (\varepsilon \circ \beta)$ folgt sofort aus Def. 7.1 (c)

Wir wissen, dass $[\alpha \circ \varepsilon] \overset{\text{Lemma 7.3}}{=} [\alpha] \Rightarrow \exists H_\alpha : I \times I \to G$ mit $H_\alpha(t,0) = \alpha(t)$
$H_\alpha(t,1) = (\alpha \circ \varepsilon)(t)$

analog $\exists H_\beta : I \times I \to G$ mit $H_\beta(t,0) = \beta(t)$,
$H_\beta(t,1) = (\varepsilon \circ \beta)(t)$

$\Rightarrow H_1 : I \times I \to G \times G$ bzw. $H_2 : I \times I \to G \times G$ sind Homotopien und
$(t,s) \mapsto (H_\alpha, H_\beta)$ $\qquad (t,s) \mapsto (H_\beta, H_\alpha)$

und $H = m \circ H_1$ bzw. $H' = m \circ H_2$ ebenfalls $(*)$

$\Rightarrow \alpha \cdot \beta \simeq (\alpha \circ \varepsilon) \cdot (\varepsilon \circ \beta)$ rel $\{0,1\}$ $\Rightarrow [\alpha \cdot \beta] = [\alpha \circ \beta] = [\alpha] \circ [\beta]$

(c) ~~[illegible] gilt $[\alpha \cdot \beta] = [\beta \cdot \alpha] \overset{(b)}{\Rightarrow} [\alpha] \circ [\beta] = [\beta] \circ [\alpha]$ also ist $\pi_1(G,e)$ abelsch.~~

Wegen $(\alpha \circ \varepsilon) \cdot (\varepsilon \circ \beta) = (\varepsilon \circ \beta)(\alpha \circ \varepsilon)$ und $(*)$

folgt $\pi_1(G,e)$ abelsch