TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. M. Schulze und Raul Epure Sommersemester 2019

Einführung in die Topologie
Blatt 7

Abgabetermin: Dienstag, 09.07.2019, 10:00 Uhr

Aufgabe 25.

(a) Eine endliche Gruppe G operiere stetig und frei auf einem Hausdorff-Raum X. Zeigen Sie, dass die Gruppenoperation dann auch frei diskontinuierlich ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine stetige Gruppenoperation auf einem topologischen Raum X an, welche frei, jedoch nicht frei diskontinuierlich ist.

Aufgabe 26. Sei X ein topologischer Raum, $U, V \subseteq X$ offen mit $X = U \cup V$. Weiterhin sei $U \cap V$ wegzusammenhängend und $x_0 \in U \cap V$. Zeigen Sie:

(a) Zu jedem Weg $\alpha \in \Gamma(X, x_0)$ existieren Wege $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Gamma(X, x_0)$ mit der Eigenschaft, dass alle α_i ganz in U oder ganz in V liegen und $[\alpha] = [\alpha_1] \bullet \ldots \bullet [\alpha_n] \in \pi_1(X, x_0)$ gilt.

(b) Gilt $\pi_1(U, x_0) = \pi_1(V, x_0) = \{1\}$, so ist $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$.

Hinweis zu (a): Verwenden Sie das Lemma von Lebesgue (Lemma 8.9).

Aufgabe 27. Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Zeigen Sie:

(a) $\pi_1(S^n, x_0) = \{1\}$ für alle $x_0 \in S^n$.

(b) Die Abbildung $p : S^n \to \mathbb{P}^n, x \mapsto \overline{x}$ ist eine zweiblättrige Überlagerung.

(c) $\pi_1(\mathbb{P}^n, x_0) \cong \mathbb{Z}_2$ für alle $x_0 \in \mathbb{P}^n$.

Hinweis zu (a): Verwenden Sie die stereographische Projektion.

Aufgabe 28. Bestimmen Sie die folgenden Fundamentalgruppen:

(a) $\pi_1(\hat{\mathbb{R}}, x_0)$ für alle $x_0 \in \hat{\mathbb{R}}$, wobei $\hat{\mathbb{R}}$ die Einpunktkompaktifizierung aus Aufgabe 13 ist.

(b) $\pi_1(S^n \times D^2, x_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $x_0 \in S^n \times D^2$.

(c) $\pi_1(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m, x_0)$ für alle $n, m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $x_0 \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$.