Prof. Dr. M. Schulze und Raul Epure Sommersemester 2019

Einführung in die Topologie
Blatt 5

Abgabetermin: Dienstag, 11.06.2019, 10:00 Uhr

Aufgabe 17. Sei $X := D^2$ versehen mit der Standardtopologie ebenso, wie $G := O(2) \subseteq \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$. Wir definieren die Gruppenoperation $\cdot : G \times X \to X, (g, x) \mapsto gx$, wobei gx die übliche Matrix - Vektor Multiplikation ist. Zeigen Sie:

(a) Die Gruppenoperation ist im Sinne von Bemerkung 5.21 stetig.

(b) $X/G \cong [0, 1]$.

Aufgabe 18. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Wir nennen G eine **topologische Gruppe**, wenn die Multiplikationsabbildung $m : G \times G \to G, (g, h) \mapsto g \cdot h$ und die Inversionsabbildung $i : G \to G, g \mapsto g^{-1}$ stetige Abbildungen sind, wobei $G \times G$ mit der Produkttopologie versehen ist. Zeigen Sie:

(a) $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ist, versehen mit der Standardtopologie, für alle $n \in \mathbb{N}$ eine topologische Gruppe.

(b) Ist $H \leq G$ eine Untergruppe, so ist H versehen mit der Teilraumtopologie eine topologische Gruppe.

Aufgabe 19. Sei G eine endliche Gruppe, die stetig auf dem normalen Hausdorff-Raum X operiert. Zeigen Sie:

(a) X/G ist ein normaler Hausdorff - Raum.

(b) Der projektive Raum $\mathbb{P}^n$ ist ein normaler Hausdorff-Raum.

Aufgabe 20. Sei $Z := S^1 \times I \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ der Zylindermantel. Zeigen Sie, dass der Raum $Z/_\sim$ homöomorph zum Möbiusband ist, wobei die Relation durch $(z, 1) \sim (-z, 1)$ für alle $z \in S^1$ definiert wird.

Bemerkung: Sie müssen in dieser Aufgabe nicht alle Abbildungen, die Sie verwenden, auf ihre benötigten mathematischen Eigenschaften hin untersuchen. Sinn dieser Aufgabe ist es, das Verhalten von Topologien beim Zerschneiden bzw. Zusammenkleben zu verstehen. Aus diesem Grund können Sie sich die technischen Details ersparen.