TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. M. Schulze und Raul Epure

Sommersemester 2019

Einführung in die Topologie
Blatt 4

Abgabetermin: Dienstag, 28.05.2019, 10:00 Uhr

Aufgabe 13. Sei X ein nicht kompakter Menge Hausdorff - Raum mit Topologie $\mathscr{T}_X$. Mit ∞ bezeichnen wir einen formalen Punkt, den wir **unendlich fernen Punkt** nennen. Wir definieren die Menge $\hat{X} := X \cup \{\infty\}$. $\hat{X}$ ist die sogenannte **Einpunktkompaktifizierung von** X. Zeigen Sie:

(a) $\mathscr{T} := \mathscr{T}_X \cup \left\{\hat{X} \setminus K \mid K \subseteq X \text{ kompakt}\right\}$ ist eine Topologie auf $\hat{X}$.

(b) $\left(\hat{X}, \mathscr{T}\right)$ ist kompakt.

(c) $\overline{X} = \hat{X}$.

Aufgabe 14. In dieser Aufgabe wollen wir einen alternativen Beweis für Satz 4.12, (a) kennenlernen. Insbesondere dürfen im Folgenden weder Satz 4.11, noch Satz 4.12 für die Beweise verwendet werden. Wir bezeichnen einen topologischen Raum X als **starken Hausdorff-Raum**, falls für alle kompakten Mengen $K \subseteq X$ und für alle $x \in X \setminus K$ offene Mengen $U, V \subseteq X$ mit $U \cap V = \emptyset$ existieren mit $x \in U$ und $K \subseteq V$. Zeigen Sie:

(a) Ist X ein starker Hausdorff-Raum, so gibt es für beliebige kompakte Mengen $K, L \subseteq X$ mit $K \cap L = \emptyset$ offene Mengen $U, V \subseteq X$ mit $U \cap V = \emptyset$, sodass $K \subseteq U$ und $L \subseteq V$.

(b) Jeder Hausdorff-Raum ist ein starker Hausdorff-Raum.

Insbesondere sind die Begriffe starker Hausdorff-Raum und Hausdorff-Raum äquivalent.

Aufgabe 15. Sei X ein normaler topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine abgeschlossene Menge. Wir versehen Y mit der Teilraumtopologie. Zeigen Sie:

(a) Y ist ein normaler topologischer Raum.

(b) Sind $A, B \subseteq X$ abgeschlossen, $A \cap B = \emptyset$ und $U', V' \in \mathscr{T}_Y$ mit $A \cap Y \subseteq U', B \cap Y \subseteq V'$ und $U' \cap V' = \emptyset$, so existieren offene Mengen $U, V \in \mathscr{T}_X$ mit $A \subseteq U, B \subseteq V, U \cap V = \emptyset$ und $U' = U \cap Y$.

(c) Sind $A \subseteq X$ abgeschlossen, $U \in \mathscr{T}_X$ mit $A \subseteq U, B := A \cap Y, V := U \cap Y, V' \in \mathscr{T}_Y$ und $B' \subseteq Y$ abgeschlossen, sodass $B \subseteq V' \subseteq B' \subseteq V$, so existieren $U' \in \mathscr{T}_X$ und $A' \subseteq X$ abgeschlossen mit:

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \subseteq & U' & \subseteq & A' & \subseteq & U & \subseteq & X \\ \cup\!\vert & & \cup\!\vert & & & & \cup\!\vert & & \cup\!\vert \\ B & \subseteq & V' & \subseteq & B' & \subseteq & V & \subseteq & Y \end{array},$$

wobei $V' = U' \cap Y$.

Hinweis zu (c): Schauen Sie sich den Beweis von Lemma 4.23 an.

Aufgabe 16. Zeigen Sie, dass $\hat{\mathbb{R}}$, die Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{R}$ aus Aufgabe 13, und S^1 homöomorph sind.

Hinweis: Es kann hilfreich sein S^1 in die komplexen Zahlen einzubetten und Winkelfunktionen zu verwenden.