Prof. Dr. M. Schulze und Raul Epure — Sommersemester 2019

Einführung in die Topologie
Blatt 2

Abgabetermin: Dienstag, 30.04.2019, 10:00 Uhr

Aufgabe 5. Sei X ein topologischer Raum und $A, B \subseteq X$. Ersetzen Sie das Symbol $\square$ durch eines der Symbole $\subseteq, \supseteq$ oder $=$ so, dass die folgenden Aussagen wahr werden:

(a) $(A \cup B)^\circ \,\square\, A^\circ \cup B^\circ$,

(b) $\overline{A \cup B} \,\square\, \overline{A} \cup \overline{B}$,

(c) $\partial(A \cup B) \,\square\, \partial A \cup \partial B$.

Beweisen Sie ihre Behauptung und geben Sie für ausgeschlossene Fälle, sofern möglich, ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 6. Sei X ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$. Zeigen Sie:

(a) $S \subseteq Y$ ist genau dann abgeschlossen in der Relativtopologie von Y, wenn eine abgeschlossene Menge $A \subseteq X$ existiert mit $S = Y \cap A$.

(b) Ist Y offen in X, so ist $U \subseteq Y$ genau dann offen in der Relativtopologie von Y, wenn U offen in X ist.

(c) Ist Y abgeschlossen in X, so ist $T \subseteq Y$ genau dann abgeschlossen in der Relativtopologie von Y, wenn T abgeschlossen in X ist.

Aufgabe 7. Sei $X := \mathbb{R}$ und $\mathscr{B} := \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}, a < b\} \subseteq \mathscr{P}(X)$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathscr{B}$ Basis einer Topologie $\mathscr{T}$ auf X ist.

(b) Bestimmen Sie $\mathscr{T}$.

Aufgabe 8. Seien X und Y topologische Räume, I eine beliebige Indexmenge und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie offener Teilmengen von X mit
$$X = \bigcup_{i \in I} U_i \text{ und } f|_{U_i} \text{ stetig für alle } i \in I,$$
so ist f stetig.

(b) Ist $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von X mit
$$X = \bigcup_{i \in I} A_i \text{ und } f|_{A_i} \text{ stetig für alle } i \in I,$$
so ist f stetig.