TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. M. Schulze und Raul Epure Sommersemester 2019

Einführung in die Topologie
Blatt 1

keine Abgabe

Aufgabe 1. Sei X eine beliebige Menge. Wir definieren

$$\mathscr{T} := \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X \mid X \setminus U \text{ ist abzählbar}\}.$$

Zeigen Sie, dass $(X, \mathscr{T})$ ein topologischer Raum ist.
Wir nennen die auf diese Art und Weise definierte Topologie die **Komplement - abzählbar Topologie** auf X.

Aufgabe 2. Sei X eine beliebige Menge, die wir mit der Komplement - abzählbar Topologie aus Aufgabe 1 versehen.

(a) Sei X eine abzählbare Menge. Geben Sie $\mathscr{T}$ explizit an.

(b) Sei $X = \mathbb{R}$. Bestimmen Sie alle Mengen $U \in \mathscr{T}$, welche abgeschlossen sind.

Aufgabe 3. Sei X eine beliebige Menge, I eine beliebige Indexmenge und $(\mathscr{T}_i)_{i\in I}$ eine Familie von Topologien auf X. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) $\mathscr{T}_1 := \bigcap_{i\in I} \mathscr{T}_i$ ist eine Topologie auf X.

(b) $\mathscr{T}_2 := \bigcup_{i\in I} \mathscr{T}_i$ ist eine Topologie auf X.

Aufgabe 4. Sei X eine beliebige Menge und $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$ eine beliebige Teilmenge. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige Topologie $\mathscr{T}$ gibt, welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

(i) $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{T}$ und

(ii) für alle Topologien $\mathscr{T}'$ mit $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{T}'$, gilt $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}'$.

Wir nennen $\mathscr{T}$ die von $\mathscr{A}$ **erzeugte Topologie** und schreiben diese auch als $\mathscr{T} := \langle\mathscr{A}\rangle$.
Folgern Sie nun, dass für eine Basis $\mathscr{B}$ einer Topologie $\mathscr{T}$ gilt, dass $\mathscr{T} = \langle\mathscr{B}\rangle$.