Prof. Dr. M. Schulze und R. Epure — Sommersemester 2018

Grundlagen der Mathematik I
Zwischenklausur

26. Mai 2018

Name: ______________________________ Matrikel-Nr.: ________________

Aufgabe 1 (3 + 3 Punkte)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n} 4k^3 = n^2 \cdot (n+1)^2$.

(b) $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ ist durch 9 teilbar.

Aufgabe 2 (3 + 3 Punkte)**.** Untersuchen Sie unten stehende Folgen reeller Zahlen auf Konvergenz. Geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n^3-n^2+3n-1}{5-8n+5n^3}$.

(b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{k!}{k+k!}$.

Aufgabe 3 (2 + 2 + 2 + 2 Punkte)**.** Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) Sind $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Abbildungen und existiert eine nicht-leere Menge $M \subset \mathbb{R}$ mit $f(M) = g(M)$, so gilt $f = g$.

(b) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $z^2 \in \mathbb{R}$.

(c) Die Menge $M = \left\{ \frac{m+n+3}{(m+2)(n+1)} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}$ ist abzählbar.

(d) Die auf $\mathbb{R}$ durch

$$x \sim y :\iff \exists\, a, b \in \mathbb{N} : x = a \cdot y^b$$

definierte Relation ist eine Äquivalenzrelation.

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.** Seien M, N nicht-leere Mengen und $f : M \to N$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) f ist injektiv.

(b) Für jede nicht-leere Menge X und je zwei Abbildungen $g, h : X \to M$ mit $f \circ g = f \circ h$ gilt $g = h$.

Aufgabe 5 (3 + 3 Punkte)**.** Wir definieren die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch $a_0 = 0$ und $a_{n+1} = \frac{a_n+1}{2}$.

(a) Zeigen Sie, dass (a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt ist.

(b) Sei $M = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Bestimmen Sie $\sup(M)$ und geben Sie den Wert explizit an. Beweisen Sie Ihre Behauptung!

Aufgabe 6 (6 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die Mengen $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (die Potenzmenge von $\mathbb{N}$) und $M := \{f : \mathbb{N} \to \{0, 1\} \mid f \text{ Abbildung}\}$ die gleiche Mächtigkeit besitzen.

– *Viel Erfolg* –