Prof. Dr. M. Schulze, Dr. C. Eder und R. Epure Sommersemester 2018

How To Prove It!

Direkte Beweise

Aufgabe 1. Zeigen Sie durch einen direkten Beweis:

(a) Ist $n \in \mathbb{N}$ eine gerade Zahl, so auch n^2.

(b) Ist $n \in \mathbb{N}$ eine ungerade Zahl, so auch n^2.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, ohne Verwendung der Vollständigen Induktion, folgende Aussagen:

(a) $\sum_{k=1}^{n} 2k = n(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3. Seien $A, B, C \subseteq M$ Mengen. Zeigen Sie:

(a) $A \cap (B \cup M \backslash A) \subseteq B$.

(b) Falls $A \subseteq B$, dann ist $A \cap C \subseteq B \cap C$.

(c) Falls $A \subseteq C$, dann ist $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C$.

Gelten auch die entsprechenden Gleichheiten?

Aufgabe 4. Seien X, Y nicht-leere Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Untersuchen Sie, welche der Beziehungen $\subseteq, \supseteq$ oder $=$ im folgenden gilt. Beweisen Sie Ihre Vermutung.

(a) $f(A \cup B) \square f(A) \cup f(B)$, für beliebige $A, B \subseteq X$.

(b) $f^{-1}(A \cup B) \square f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, für beliebige $A, B \subseteq Y$.

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ folgende Ungleichung gilt:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

Aufgabe 6. Zeigen Sie für alle $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ die folgende Ungleichung:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$$

Aufgabe 7. Zeigen Sie:

(a) $\sqrt{3}$ ist irrational.

(b) $\sqrt{5}$ ist irrational.

(c) $\sqrt{p}$ ist irrational für alle $p \in \mathbb{N}$ prim.

Aufgabe 8. Zeigen Sie:

(a) Es gibt unendlich viele gerade Zahlen.

(b) Es gibt unendlich viele ungerade Zahlen.

(c) Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Aufgabe 9. Zeigen Sie:

(a) Ist $n \in \mathbb{N}$ und n^2 gerade, so ist n gerade.

(b) Ist $n \in \mathbb{N}$ und n^2 ungerade, so ist n ungerade.

Aufgabe 10. Sei $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass $a \cdot b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Aufgabe 11. Sie haben $n \in \mathbb{N}_{>0}$ Objekte und verteilen diese auf $1 \leq k < n$ Schubladen. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Es gibt mindestens eine Schublade, die mindestens 2 Objekte enthält.

(b) Es gibt mindestens eine Schublade, die mindestens $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ Objekte enthält. [1]

Aufgabe 12. Zeigen Sie, dass es keine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt mit $f(x) > f(y)$ für alle $x < y$. Was kann man über Abbildungen sagen, für die $f(x) \geq f(y)$ für $x < y$ gilt?

[1] $\lceil x \rceil$ bezeichnet die kleinste ganze Zahl größer x. Beispielsweise ist $\lceil 2,345 \rceil = 3$.

Aufgabe 13. Beweisen Sie folgende Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$;

(b) $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{3}$;

(c) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (n+k) \cdot (n-k) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (4n-1)}{6}$;

(d) $\sum\limits_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \leq n$;

Aufgabe 14. Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ folgende Aussagen gelten:

(a) $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$;

(b) $\sum\limits_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} k \right)^2 = \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right)^2$;

(c) $n^5 - n$ ist durch 5 teilbar;

(d) $5^{2n} - 2^n$ ist durch 23 teilbar;

Aufgabe 15. Sei $n \in \mathbb{N}_{>2}$. Zeigen Sie, dass die Winkelsumme in einem konvexen n-Eck stets $(n-2) \cdot 180°$ beträgt.

Aufgabe 16. Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt, dass $\sqrt[2^n]{2} = 2^{\frac{1}{2^n}}$ irrational ist.

Die folgenden Aussagen sind falsch. Finden Sie den (oder die) Fehler in den beigefügten „Beweisen“.

Aufgabe 17 (Farbenspiel)**.**

Satz. Alles was nicht rot ist, ist blau.

Beweis. Wir werden die Behauptung durch Widerspruch beweisen.

Nehmen wir also die Negation der Behauptung an: *Alles was rot ist, ist blau.*

Dies ist aber ein Widerspruch zur Eindeutigkeit der Farbe. Also kann die Annahme nicht gelten und die Behauptung ist bewiesen. □

Aufgabe 18 ($3 = 4$)**.**

Satz. Betrachte den Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Dann gilt $3 = 4$.

Beweis. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, sodass $a + b = c$. Dann gilt

$$\begin{array}{cccc} & 4a + b = c + 3a & \Leftrightarrow & 4a + 4b = c + 3a + 3b \\ \Leftrightarrow & 4a + 4b - 4c = -3c + 3a + 3b & \Leftrightarrow & 4(a + b - c) = 3(a + b - c). \end{array}$$

Durch Kürzen folgt daraus $3 = 4$. □

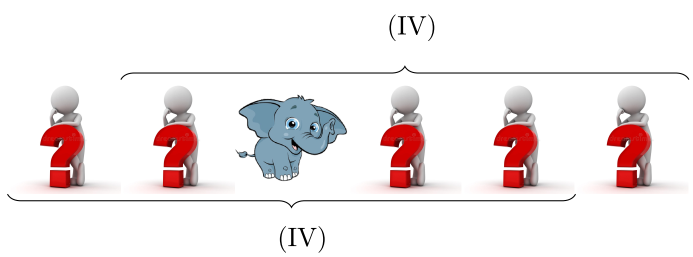
Aufgabe 19 (Alle Tiere sind Elefanten)**.**

Satz. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest. Dann gilt: Wenn sich unter n Tieren ein Elefant befindet, dann sind alle Tiere Elefanten.

Beweis. Wir führen einen Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang Wenn in einer Menge von $n = 1$ Tieren eines ein Elefant ist, dann sind alle Elefanten.

Induktionsschritt $n \to n + 1$: Es sei unter $n + 1$ Tieren eines ein Elefant. Wir stellen die Tiere in eine Reihe und betrachten jeweils die ersten und die letzten n Tiere. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei der Elefant unter den ersten n Tieren.



Nach **Induktionsvoraussetzung** sind dann die ersten n Tiere sämtlich Elefanten. Dann befindet sich aber auch unter den letzten n Tieren ein Elefant.

Wieder folgt nach Induktionsvoraussetzung, dass auch die letzten n Tiere sämtlich Elefanten sind. Somit sind alle $n + 1$ Tiere Elefanten. □

Aufgabe 20 (Natürliche Zahlen)**.**

Satz. Alle natürlichen Zahlen sind gleich.

Beweis. Wir werden den folgenden Fakt zeigen: Seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\max(a, b) = m$, so folgt $a = b$. Wenn wir dies für alle $m \in \mathbb{N}$ gezeigt haben, folgt die Behauptung. Wir zeigen diese Aussage per vollständiger Induktion.

Induktionsanfang $m = 0$: Wenn wir für $a, b \in \mathbb{N}$ beliebig $\max(a, b) = 0$ haben, muss $a = b = 0$ sein.

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung sei für $\max(a, b) = m$ bewiesen.

Induktionsschritt: Sei $\max(a, b) = m + 1$. Dann gilt

$$\max(a - 1, b - 1) = \max(a, b) - 1 = m.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt also $a - 1 = b - 1$ und deshalb $a = b$. □

Aufgabe 21 (Abschätzungen)**.**

Satz. Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt $\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n^2+1}$.

Beweis. Wir beweisen die Aussage per vollständiger Induktion:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt $\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} = \frac{1}{n^2+1}$. ✓
Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n^2+1}$ (IV). Dann ist

$$\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} \overset{\text{(IV)}}{\leq} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2n^2+2}.$$

Dies ist genau dann kleiner als $\frac{1}{(n+1)^2+1} = \frac{1}{n^2+2n+2}$, wenn $n \geq 2$.

Also ist, zusammen mit dem Induktionsanfang, $\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n^2+1}$ für alle natürlichen $n \geq 1$.

□

Aufgabe 22 (Natürliche Zahlen)**.**

Satz. Ein Krokodil ist länger als breit.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung in zwei Schritten.

(a) Ein Krokodil ist länger als grün: Das Krokodil ist oben und unten lang, aber nur oben grün.

(b) Ein Krokodil ist grüner als breit: Das Krokodil ist grün entlang der Länge und der Breite, aber nur breit entlang der Breite.

Da das Krokodil nun länger als grün und grüner als breit ist, ist es länger als breit und die Behauptung ist bewiesen. □

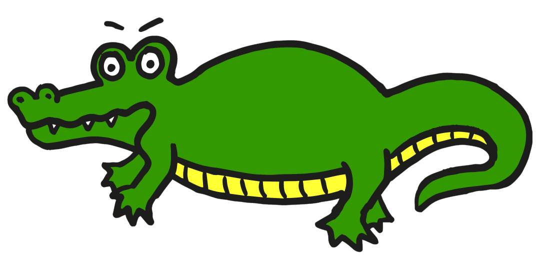


Abbildung 1. Ein Krokodil ist nur oben grün.

Aufgabe 23. Zeigen Sie, dass für beliebige Mengen A, B, C die Formel

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| + |A \cap B \cap C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$$

gilt.

Aufgabe 24. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Für $n, m \in \mathbb{N}$ gilt: $3 \mid n$ und $4 \mid m$ impliziert $7 \mid n + m$.

(b) Für $n, m \in \mathbb{N}$ gilt: $2 \mid n$ und $4 \mid m$ impliziert $6 \mid n + m$.

(c) In Berlin gibt es mindestens 3 Menschen mit derselben Anzahl an Haaren auf dem Kopf.

Hinweis zu (c): Verwenden Sie Aufgabe 11

Aufgabe 25. Gegeben seien drei irrationale Zahlen. Zeigen Sie, dass es unter diesen drei Zahlen mindestens zwei gibt, deren Summe auch irrational ist.

Aufgabe 26. Seien $n, m \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Beweisen Sie folgende Formeln:

(a) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

(b) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$.

(c) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}$.

Aufgabe 27. Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ nicht-leere Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Wir nennen eine Abbildung *streng monoton wachsend*, falls $f(x) < f(y)$ für alle $x, y \in X$ mit $x < y$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Ist f streng monoton wachsend, so ist f injektiv.

(b) Sind X und Y gleichmächtig, so ist f bijektiv.

(c) Ist f surjektiv und streng monoton wachsend, so sind X und Y gleichmächtig.