TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. M. Schulze und R. Epure Sommersemester 2018

Grundlagen der Mathematik I
Abschlussklausur

28. Juli 2018

Name: ______________________________ Matrikel-Nr.: ________________

Aufgabe 1 (2 + 3 Punkte)**.** Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{\log(1+x)+x}$.

(b) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{\cos(x)-1}{x^2}}$.

Aufgabe 2 (3 + 3 Punkte)**.** Bestimmen Sie folgende Integrale:

(a) $\int \log(1+e^x)\cdot(1+e^x)\cdot e^x \mathrm{d}x$.

(b) $\int \cos^3(x)\mathrm{d}x$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** Sei $t \in \mathbb{R}$. Wir definieren

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & 10 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } b_t = \begin{pmatrix} t \\ 3+t \\ 1-t \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des linearen Gleichungssystems $Ax = b_t$ in Abhängigkeit von t.

Aufgabe 4 (2 + 2 + 2 + 2 Punkte)**.** Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit $|f(x) - f(y)| \leq |x-y|^\pi$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, so ist f differenzierbar.

(b) Sind (a_n) und (b_n) Folgen reeller Zahlen, ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R_1 \in \mathbb{R}$ und ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R_2 \in \mathbb{R}$, so hat die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)x^n$ Konvergenzradius $R = R_1 + R_2$.

(c) Die Funktionenfolge $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1+e^{nx}}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

(d) Ist K ein Körper, V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und $B = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine unendliche Familie von Vektoren mit $\langle B \rangle = V$, dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\langle b_1, \ldots, b_N \rangle = V$.

Aufgabe 5 (2 + 3 Punkte)**.** Sei $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^5$.

(a) Bestimmen Sie eine Basis von U.

(b) Gibt es einen Isomorphismus $f : \mathbb{R}^5/U \to \mathbb{R}^2$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6 (3 + 3 Punkte)**.** Zeigen Sie:

(a) Für alle $x \in (-1, \infty)$ gilt $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{\pi}{4}$.

(b) Sei $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto 5 \exp\left(\sin\left(-4\arctan(x) + x - 4\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right)\right)$.
Bestimmen Sie das Taylor-Polynom zweiter Ordnung $T^2_{f,\pi}$.

Aufgabe 7 (3 + 3 Punkte)**.** Sei K ein Körper, V, W, Y und Z K-Vektorräume, sowie $f : V \to Y$, $g : W \to Y$ und $h : V \to Z$ K-lineare Abbildungen. Wir definieren

$$V \times_Y W := \{(v, w) \in V \times W \mid f(v) = g(w)\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $V \times_Y W$ ist ein K-Vektorraum.

(b) Es gibt K-Vektorräume W und Y mit geeigneten zugehörigen K-linearen Abbildungen f und g, sodass

$$\mathrm{Ker}(h) \cong V \times_Y W.$$

Aufgabe 8 (6 Punkte)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass wenn $f'(a) < 0$ und $f'(b) > 0$ ein $c \in (a, b)$ existiert mit $f'(c) = 0$.

– Viel Erfolg –