TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. M. Schulze und R. Epure — Sommersemester 2018

Grundlagen der Mathematik I
Blatt 0

Abgabetermin: Montag, 16.04.2018, 10:00 Uhr

Aufgabe 1.

(a) Drücken Sie folgende Aussagen in Worten aus und formulieren Sie deren Negation, falls die Aussage falsch sein sollte:

i) $\forall m \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N} : m = 2k + 1$

ii) $\forall m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} : (\frac{m}{n} \in \mathbb{N} \Rightarrow (\exists l \in \mathbb{N} : m = l \cdot n))$

(b) Schreiben Sie folgende Aussagen mit Hilfe der Symbole $\forall, \exists, \Rightarrow$ wie in Teilaufgabe a). Beweisen oder widerlegen Sie sie dann.

i) Alle natürlichen Zahlen sind ein Vielfaches von zwei.

ii) Die Summe von je zwei ungeraden natürlichen Zahlen ist gerade.

Aufgabe 2.

(a) Seien A, B, C Aussagen. Beweisen Sie:

i) $A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

ii) $A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Seien nun X, Y, Z Mengen. Beweisen Sie:

iii) $Z \cap (X \cup Y) = (Z \cap X) \cup (Z \cap Y)$

iv) $Z \cup (X \cap Y) = (Z \cup X) \cap (Z \cup Y)$

(b) Seien X, Y, Z Mengen, wobei Z nicht-leer ist. Weiterhin sei $X, Y \subset Z$ (d.h. $X \subset Z$ und $Y \subset Z$). Beweisen Sie:

i) $Z \backslash (X \cup Y) = (Z \backslash X) \cap (Z \backslash Y)$

ii) $Z \backslash (X \cap Y) = (Z \backslash X) \cup (Z \backslash Y)$

Prof. Dr. M. Schulze und R. Epure — Sommersemester 2018

Grundlagen der Mathematik I
Blatt 1

Abgabetermin: Montag, 23.04.2018, 10:00

Aufgabe 3. Seien M, N nicht-leere Mengen und $f : M \to N$ eine Abbildung. Ersetzen Sie das Symbol $\square$ durch eines der Symbole $\subset, \supset, =$ so, dass die folgenden Aussagen wahr werden.

(a) $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \square f^{-1}(A \cap B)$ für alle $A, B \subset N$.

(b) $f(A) \cap f(B) \square f(A \cap B)$ für alle $A, B \subset M$.

Beweisen Sie Ihre Behauptung!

Aufgabe 4.

(a) Untersuchen Sie folgende Abbildung auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

i) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto 3x + 2$

ii) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x, 2x + y)$

(b) Seien M, N, L nicht-leere Mengen sowie $f : M \to N$ und $g : N \to L$ bijektive Abbildungen. Zeigen Sie, dass dann auch $f^{-1} : N \to M$ und $g \circ f : M \to L$ bijektiv sind.

Aufgabe 5. Seien M, N nicht-leere Mengen und $f : M \to N$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

i) f ist surjektiv.

ii) Für jede nicht-leere Menge Y und für zwei Abbildungen $g, h : N \to Y$ mit $g \circ f = h \circ f$ gilt $g = h$.

iii) Für alle Mengen $A \subset N$ gilt: $f(f^{-1}(A)) = A$.

Aufgabe 6. Seien M, N, L nicht-leere Mengen und $f : M \to N,\ g : N \to L$ Abbildungen. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.

(b) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist g injektiv.

(c) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist f surjektiv.

(d) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. M. Schulze und R. Epure — Sommersemester 2018

Grundlagen der Mathematik I
Blatt 2

Abgabetermin: Montag, 30.04.2018, 10:00 Uhr

Aufgabe 7.

(a) Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$ mittels vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Seien weiterhin M, N endliche Mengen mit $|M| = |N| = n$. Zeigen Sie, dass es genau $n!$ bijektive Abbildungen $f : M \to N$ gibt.

Aufgabe 8. Seien $k, m, n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Für alle $k \leq n$ gilt

$$\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

(b) Für alle $k \leq m + n$ gilt

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot \binom{m}{k-j}.$$

Hinweis zu (b): Betrachten Sie $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m \cdot (1+x)^n$ und beachten Sie, dass $\binom{n}{k} = 0$, wenn $k < 0$ oder $k > n$.

Aufgabe 9. Betrachten Sie auf $\mathbb{Z}$ die Relation $x \sim y :\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 3k$.

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Auf $\mathbb{Z}/\sim$ sei die Addition durch $\overline{x} + \overline{y} := \overline{x+y}$ und die Multiplikation durch $\overline{x} \cdot \overline{y} := \overline{x \cdot y}$. Zeigen Sie, dass diese Operationen wohldefiniert sind.

(c) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}/\sim, +, \cdot)$ mit den obigen Operationen ein Körper ist, indem Sie die Additions- und Multiplikationstafel angeben.

Aufgabe 10. Seien M und N nicht-leere Mengen und $f : N \to M$ eine surjektive Abbildung. Betrachten Sie auf N die Relation $x \sim y :\Longleftrightarrow f(x) = f(y)$. Zeigen Sie:

(a) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

(b) $g : N/\sim \longrightarrow M,\ \overline{x} \mapsto f(x)$ ist eine wohldefinierte, bijektive Abbildung.

(c) Ist N abzählbar, so ist auch M abzählbar.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. M. Schulze und R. Epure Sommersemester 2018

Grundlagen der Mathematik I
Blatt 3

Abgabetermin: Montag, 07.05.2018, 10:00

Aufgabe 11. Bestimmen Sie Maximum, Minimum, Supremum und Infimum folgender Mengen, sofern diese existieren:

(a) $M := \left\{ \frac{x^2}{5+x^2} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}$,

(b) $N := \left\{ \frac{4}{2-x} \mid x \in (0,2) \right\} \subset \mathbb{R}$.

Beweisen Sie Ihre Behauptung!

Aufgabe 12. Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nicht-leere nach unten beschränkte Mengen. Wir definieren $A+B := \{a+b \mid a \in A,\ b \in B\}$ und $-A := \{-a \mid a \in A\}$. Beweisen Sie:

(a) $\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$.

(b) $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$.

(c) $-\inf(A) = \sup(-A)$.

Aufgabe 13. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion vom Grad $d \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass es eine Polynomfunktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ von kleinerem Grad (oder die Nullfunktion) und ein $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gibt, so dass
$$f(n) = c \cdot \binom{n+d}{d} + g(n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Summenfunktion $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto \sum_{k=0}^{n} f(k)$ eine Polynomfunktion vom Grad $d+1$ ist.

(c) Wie lautet der Leitkoeffizient von $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto \sum_{k=0}^{n} k^7$?

Hinweis zu (b): Verwenden Sie Aufgabe 8.

Aufgabe 14.

(a) Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}_{>0}$:
$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$$

Hinweis: Der binomische Lehrsatz könnte hilfreich sein.

(b) Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt die folgende Ungleichung:
$$\left(\frac{n}{3}\right)^n \leq n! \leq \left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

Beweisen Sie ihre Behauptung!

Prof. Dr. M. Schulze und R. Epure — Sommersemester 2018

Grundlagen der Mathematik I
Blatt 4

Abgabetermin: Montag, 14.05.2018, 10:00 Uhr

Aufgabe 15. Bestimmen Sie Real-, Imaginärteil und Betrag folgender komplexer Zahlen:

(a) $\frac{2+i}{5i-3}$.

(b) $\frac{1}{(5+i)^2}$.

(c) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2$.

(d) i^n für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 16. Sei $f : \mathbb{C}\backslash\{5i\} \to \mathbb{C}\backslash\{1\}$ mit $z \mapsto \frac{z+i}{z-5i}$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass f bijektiv ist und geben sie f^{-1} an.

(b) Ersetzen Sie das Symbol $\square$ durch eines der Symbole $\subset, \supset, =$ so, dass die folgende Aussage wahr wird:

$$f^{-1}(\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}) \square \mathbb{R}.$$

Beweisen Sie Ihre Behauptung!

Aufgabe 17.

(a) Untersuchen Sie mit Hilfe von Definition 6.1 (b) die folgenden reellen Zahlenfolgen auf Konvergenz:

i) $a_n = \frac{5n^2-1}{n^2+1}$.

ii) $b_n = \frac{(-1)^n \cdot n}{n+1}$.

Geben Sie im Falle der Konvergenz zu jedem $\varepsilon > 0$ explizit ein $n_0 \in \mathbb{N}$ wie in der Definition an.

(b) Sei (z_n) eine Folge komplexer Zahlen. Zeigen Sie, dass (z_n) genau dann gegen ein $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, wenn die reellen Folgen $(\operatorname{Re} z_n)$ und $(\operatorname{Im} z_n)$ gegen $\operatorname{Re} z$ bzw. $\operatorname{Im} z$ konvergieren.

Aufgabe 18. Seien (a_n) und (b_n) zwei reelle Zahlenfolgen.

(a) Zeigen Sie: Gilt $a_n \to a \in \mathbb{R}_{>0}$ und $b_n \to \infty$, so gilt auch $a_n \cdot b_n \to \infty$.

(b) Zeigen Sie: Gilt $a_n \to \infty$ und $b_n \to \infty$, so gilt auch $a_n + b_n \to \infty$.

(c) Kann in (b) die Bedingung "$\to \infty$" durch "nach oben unbeschränkt" ersetzt werden, d.h. ist die Summe nach oben unbeschränkter Folgen nach oben unbeschränkt?

Prof. Dr. M. Schulze und R. Epure Sommersemester 2018

Grundlagen der Mathematik I
Blatt 5

Abgabetermin: **Dienstag**, 22.05.2018, 10:00 Uhr

Aufgabe 19. Untersuchen Sie für $n \in \mathbb{N}$ die folgenden Zahlenfolgen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert :

(a) $a_n = \frac{4n^3-n^2+6}{6n^3+2n^2+1}$.

(b) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

(c) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2^k n + 2n^2 + k}{2^{k+1} n^2 + 2^k k}$.

(d) Die Folge definiert durch $a_0 = a, a_1 = b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

Hinweis zu (d): Finden Sie einen expliziten Ausdruck für $a_{k+1} - a_k$ und betrachten Sie die Summe $\sum\limits_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k)$.

Aufgabe 20.

(a) Sei (a_n) eine Folge positiver reeller Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \geq 0$. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}.$$

(b) Sei $a_n := \sqrt{n}, n \in \mathbb{N}$, eine Folge reeller Zahlen.

i) Zeigen Sie, dass (a_n) keine Cauchy-Folge ist.

ii) Zeigen Sie, dass dennoch

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall k \in \mathbb{N} \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : |a_n - a_{n+k}| < \varepsilon.$$

Was ist der Unterschied zu Definition 6.31?

Aufgabe 21.

(a) Berechnen Sie $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{(-5)^n + 3^n}{5^n + 2^n}$.

(b) Zeigen Sie, dass für jede beschränkte reelle Folge (a_n) gilt :

$$\liminf_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup_{n\to\infty} a_n.$$

(c) Zeigen Sie, dass für je zwei beschränkte reelle Folgen gilt:

$$\liminf a_n + \limsup b_n \leq \limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n.$$

Geben Sie jeweils ein Beispiel an, in welchem die Ungleichung strikt ist.

Hinweis: Aufgabe 12 könnte hilfreich sein.

Aufgabe 22. In dieser Aufgabe wollen wir beweisen, dass jede nicht-negative reelle Zahl c für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$ eine eindeutige k-te Wurzel besitzt. Wir definieren dazu für ein gegebenes c und $k \in \mathbb{N}_{>0}$ rekursiv die Folge (a_n) durch

$$a_0 := 1 \text{ und } a_{n+1} := a_n \cdot \left(1 + \frac{c - a_n^k}{k a_n^k}\right) \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $a_{n+1}^k \geq c$.

(b) Die Folge (a_n) ist ab dem zweiten Folgenglied monoton fallend.

(c) Zu jeder Zahl $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt es ein eindeutiges $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $a^k = c$. Wir nennen dieses a die **k-te Wurzel aus** c und schreiben sie als $\sqrt[k]{c}$.

Prof. Dr. M. Schulze und R. Epure — Sommersemester 2018

Grundlagen der Mathematik I
Blatt 6

Abgabetermin: Montag, 28.05.2018, 10:00 Uhr

Aufgabe 23.

(a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

ii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+2n+3}$.

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n} x^n$.

ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{(-n)^n} x^n$.

Aufgabe 24. Sei $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$. Berechnen Sie mit Hilfe des Cauchy - Produktes $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2$ den Grenzwert der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nq^n$.

Aufgabe 25. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Folge $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$, konvergiert.

(b) Die Folge $b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, $n \in \mathbb{N}$, konvergiert.

(c) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Den Grenzwert der beiden Folgen bezeichnen wir als *eulersche Zahl e*.

Hinweis zu (a): Verwenden Sie Aufgabe 14 (a) und betrachten Sie $\frac{a_n}{a_{n-1}}$.
Hinweis zu (c): Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Betrachten Sie hierzu den Beweis von Aufgabe 14 (a) und $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} > \sum\limits_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$ für ein $m < n$.

Aufgabe 26.

(a) Zeigen Sie durch explizites Nachprüfen der ε - δ - Definition, dass die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ stetig ist.

(b) Sei $f : [a, b] \to [c, d]$ eine bijektive und monoton wachsende Funktion zwischen abgeschlossenen reellen Intervallen. Zeigen Sie, dass f dann stetig ist.

Prof. Dr. M. Schulze und R. Epure Sommersemester 2018

Grundlagen der Mathematik I
Blatt 7

Abgabetermin: Montag, 04.06.2018, 10:00 Uhr

Aufgabe 27.

(a) Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir definieren die Funktionen $f_+, f_- : D \to \mathbb{R}$ durch:

$$f_+(x) := \max\left(f(x), 0\right) \text{ für alle } x \in D,$$
$$f_-(x) := \max\left(-f(x), 0\right) \text{ für alle } x \in D.$$

Zeigen Sie:

i) $f = f_+ - f_-$ und $|f| = f_+ + f_-$.

ii) f ist genau dann stetig, wenn f_+ und f_- stetig sind.

(b) Zeigen Sie, dass $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$ gleichmäßig stetig ist.

Hinweis zu (b): Betrachten Sie g zunächst auf dem Intervall $[0, 1]$ und dann auf dem Intervall $[1, \infty)$.

Aufgabe 28.

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|,$$

für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq y$ und ein $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeigen Sie, dass f dann gleichmäßig stetig ist.

(b) Sei $c \in \mathbb{R}$ fest und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = c$. Zeigen Sie, dass g beschränkt ist.

Aufgabe 29. Seien im folgenden $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge, wobei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$.

(a) Wir definieren für eine reelle Funktion

$$\|f\|_\infty := \sup(\{|f(x)| : x \in D\}) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}.$$

Zeigen Sie, dass f_n genau dann gleichmäßig gegen f konvergiert, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass

$$f_n : [c, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{1 + nx^2}$$

für alle $c \in \mathbb{R}_{>0}$ gleichmäßig konvergent ist. Gilt dies auch für $c = 0$?

Aufgabe 30. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Weiterhin sei $f : [a, b] \to [a, b]$ eine Abbildung mit

$$|f(x) - f(y)| < L \cdot |x - y|,$$

für ein $L \in (0, 1)$ und für alle $x, y \in [a, b]$ mit $x \neq y$. Sei $x_0 \in [a, b]$ beliebig. Wir definieren die Folge $x_{n+1} = f(x_n)$ für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass $|x_{n+1} - x_n| < L^n |x_1 - x_0|$, falls $x_1 \neq x_0$ und $n \geq 1$.

(b) Zeigen Sie, dass (x_n) unabhängig von der Wahl von x_0 konvergiert.

(c) Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt besitzt, d.h. es gibt ein $\bar{x} \in [a, b]$ mit $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

(d) Ist der Fixpunkt in (c) eindeutig bestimmt? Beweisen Sie ihre Vermutung.

Hinweis zu (b): Zeigen Sie, dass (x_n) eine Cauchy-Folge ist.

Wir laden alle Studierenden zum kommenden **Tag der Mathematik** am 9. Juni 2018 ein. Neben spannenden Mathematikvorträgen berichten auch 4 Absolventen/innen unseres Fachbereichs über ihren beruflichen Werdegang. Weitere Informationen finden sich unter: `http://www.mathematik.uni-kl.de/tdm`

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. M. Schulze und R. Epure Sommersemester 2018

Grundlagen der Mathematik I
Blatt 8

Abgabetermin: Montag, 11.06.2018, 10:00 Uhr

Aufgabe 31. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Untersuchen Sie, für welche $n \in \{0, 1, 2\}$ die Funktion f stetig bzw. differenzierbar in $x_0 = 0$ ist.

Aufgabe 32. Wir definieren den *Sinus Hyperbolicus* $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und den *Kosinus Hyperbolicus* $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Mit $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dem *Area Sinus Hyperbolicus*, bzw. $\operatorname{arcosh} : [1, \infty) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, dem *Area Kosinus Hyperbolicus*, bezeichnen wir die entsprechenden Umkehrfunktionen. Zeigen Sie folgende Identitäten:

(a) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\cosh(y) \pm \sinh(y)\cosh(x)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

(c) $\operatorname{arsinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ für alle $x \in \mathbb{R}$, *ohne* die Verkettung zu verwenden.

(d) $2 \cdot \operatorname{arcosh}(x) = \operatorname{arcosh}(2x^2 - 1)$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 1}$.

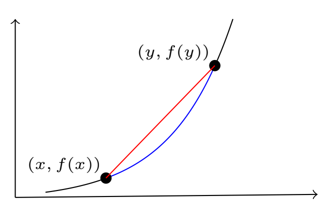
Hinweis zu (c) und (d): Verwenden Sie Aufgabe 33.

Aufgabe 33. Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig und seien $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ stetige und auf (a, ∞) differenzierbare Funktionen mit $f(a) = g(a)$ und $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in (a, \infty)$. Zeigen Sie, dass dann $f(x) = g(x)$ für alle $x \in [a, \infty)$ gilt.

Aufgabe 34.
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **konvex**, falls für alle $x, y \in [a, b]$ mit $x \leq y$ und für alle $\lambda \in [0, 1]$ die Ungleichung

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

gilt. Anschaulich gesprochen ist eine Funktion konvex, wenn der Graph von f komplett auf oder unterhalb der Verbindungsgeraden von $(x, f(x))$ und $(y, f(y))$ liegt (siehe Abbildung).



Visualisierung von $(1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$ und $f((1 - \lambda)x + \lambda y)$ für $\lambda \in [0, 1]$.

Ziel dieser Aufgabe ist es, ein einfaches Kriterium kennenzulernen, um eine Funktion auf Konvexität zu überprüfen. Hierzu nehmen wir an, dass $f \in C^2((a, b))$. Zeigen Sie:

(a) Für feste $x, y \in [a, b]$ mit $x < y$ und $\lambda \in (0, 1)$ existieren $\xi, \zeta \in \mathbb{R}$ mit

$$x < \xi < (1 - \lambda)x + \lambda y < \zeta < y$$

und

$$(1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) - f((1 - \lambda)x + \lambda y) = (1 - \lambda)\lambda(y - x)(f'(\zeta) - f'(\xi)).$$

(b) f ist genau dann konvex, wenn $f''(t) \geq 0$ für alle $t \in (a, b)$.

Mit den Ideen aus Aufgabe 34 kann man folgende Verallgemeinerung zeigen, welche Sie ab jetzt, ohne diese beweisen zu müssen, verwenden dürfen:

Satz (Jensensche Ungleichung). Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Weiterhin sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$, sowie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Dann gilt:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn f eine lineare Funktion ist oder wenn $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Bemerkung. Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine **konkave** Funktion, d.h. ist $-f$ konvex, so gilt mit den Bezeichnungen von eben die Ungleichung

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Auch in diesem Fall herrscht Gleichheit genau dann, wenn f eine lineare Funktion ist oder wenn $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Prof. Dr. M. Schulze und R. Epure | Sommersemester 2018

Grundlagen der Mathematik I
Blatt 9

Abgabetermin: Montag, 18.06.2018, 10:00 Uhr

Aufgabe 35. Berechnen Sie folgende Grenzwerte, sofern sie existieren:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x\cos(x)}{x\sin(x)+\cos(x)-1}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right)$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\tan(x)}$

(d) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

Aufgabe 36. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

wobei $p_n(z)$ ein Polynom ist, welches vom Grad der Ableitung abhängt.

(b) Untersuchen Sie, ob die Taylor-Reihe von f an der Stelle $x_0 = 0$ gegen f konvergiert.

Bemerkung:
$p\left(\frac{1}{x}\right)$ ist so zu verstehen, dass $\frac{1}{x}$ in ein Polynom eingesetzt wird, bspw.

$$p(z) = z^2 + 1 \implies p\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} + 1.$$

Aufgabe 37. Seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_{>0}$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ fest. Wir definieren die Abbildung $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$m(p) := \sqrt[p]{\frac{x_1^p + \ldots + x_n^p}{n}}, \text{ falls } p \neq 0 \text{ und } m(0) := \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

(a) Zeigen Sie, dass m in $p = 0$ stetig ist, d.h.:

$$\lim_{p\to 0} m(p) = \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

(b) Zeigen Sie, dass m monoton wachsend ist.

(c) Sei $M := \{\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)\cdot\sin(\gamma) \mid \alpha,\beta,\gamma \in (0,\pi) \text{ mit } \alpha+\beta+\gamma = \pi\} \subset \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie $\sup(M)$.

Hinweis zu (b): Sie dürfen (ohne Beweis) verwenden, dass für $y_1, \ldots, y_n > 0$ gilt:

$$\frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \cdot \log\left(\frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^n y_i \log(y_i)}{n}.$$

Hinweis zu (c): Verwenden Sie die Jensensche Ungleichung von Blatt 8!

-Bitte wenden-

Aufgabe 38. Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei beschränkte Funktionen, Z eine Zerlegung von $[a, b]$ und $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{OS}(f + g, Z) \leq \mathrm{OS}(f, Z) + \mathrm{OS}(g, Z)$,

(b) $\mathrm{OS}(cf, Z) = c\,\mathrm{OS}(f, Z)$,

(c) $\mathrm{OS}(|f|, Z) - \mathrm{US}(|f|, Z) \leq \mathrm{OS}(f, Z) - \mathrm{US}(f, Z)$.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. M. Schulze und R. Epure — Sommersemester 2018

Grundlagen der Mathematik I
Blatt 10

Abgabetermin: Montag, 25.06.2018, 10:00 Uhr

Aufgabe 39. Berechnen Sie folgende (z.T. uneigentliche und unbestimmte) Integrale:

(a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)\sin(x)\,\mathrm{dx}$

(b) $\int \operatorname{arsinh}(x)\,\mathrm{dx}$

(c) $\int\limits_2^4 \frac{x^2+1}{x^2-1}\,\mathrm{dx}$

(d) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{\frac{x^2}{2}}}{1+e^{x^2}}\,\mathrm{dx}$

Aufgabe 40. Sei $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Wir definieren

$$\Gamma(x) := \int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{dt}\,.$$

Beweisen Sie:

(a) $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ für alle $x > 0$.

(b) $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 41. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Weiterhin seien die Abbildungen $f_+, f_- : [a,b] \to \mathbb{R}$ wie in Aufgabe 27 definiert.
Zeigen Sie, dass f genau dann integrierbar ist, wenn f_+ und f_- integrierbar sind.

Aufgabe 42.

(a) Sei K ein Körper mit unendlich vielen Elementen. Wir definieren für beliebige $d \in \mathbb{N}$

$$V_d := \{f \in K[x] \mid \deg(f) \leq d\}\,,$$

wobei $\deg(f)$ der Grad von f ist. V_d ist der Raum aller Polynome f mit $\deg(f) \leq d$. Zeigen Sie, dass V_d für jedes $d \in \mathbb{N}$ ausgestattet mit der üblichen Addition und skalaren Multiplikation von Polynomen ein K-Vektorraum ist.

(b) Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Weiterhin seien $U, W \subset V$ Untervektorräume von V. Zeigen Sie:

$$U \cup W \text{ ist ein Untervektorraum von } V \iff U \subset W \text{ oder } W \subset U$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. M. Schulze und R. Epure Sommersemester 2018

Grundlagen der Mathematik I
Blatt 11

Abgabetermin: Montag, 02.07.2018, 10:00 Uhr

Aufgabe 43. Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der angegebenen Vektorräume?

(a) $U_1 := \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 3x_2 = 3x_3\big\} \subset \mathbb{R}^3$.

(b) $U_2 := \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^4 + x_3^6 + x_4^8 = 0\big\} \subset \mathbb{R}^4$.

(c) $U_3 := \big\{(\mu + \lambda, \lambda^2) \in \mathbb{R}^2 \mid \mu, \lambda \in \mathbb{R}\big\} \subset \mathbb{R}^2$.

(d) $U_4 := \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x + 2\pi) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Beweisen Sie ihre Behauptung!

Aufgabe 44. Sei K ein Körper und $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Zeigen Sie, dass für einen endlich erzeugten K-Vektorraum V und für Untervektorräume $U_1, \ldots, U_k \leq V$ folgende Bedingungen äquivalent sind:

(a) $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$

(b) $V = U_1 + \ldots + U_k$ und aus $u_1 + \ldots + u_k = 0, u_i \in U_i$, folgt $u_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, k$.

(c) $V = U_1 + \ldots + U_k$ und $U_i \cap \Big(U_1 + \ldots + U_{i-1} + U_{i+1} + \ldots + U_k\Big) = \{0\}$ für alle $i = 1, \ldots, k$.

(d) $V = U_1 + \ldots + U_k$ und $U_i \cap \Big(U_{i+1} + \ldots + U_k\Big) = \{0\}$ für alle $i = 1, \ldots, k$.

(e) $V = U_1 + \ldots + U_k$ und $\dim(V) = \dim(U_1) + \ldots + \dim(U_k)$.

Aufgabe 45. Bestimmen Sie Basen und Dimensionen folgender Untervektorräume:

(a) $U_1 := \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_3\big\} \leq \mathbb{R}^3$.

(b) $U_{2,d} := V_d \leq \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ für beliebige $d \in \mathbb{N}$. (vgl. Aufgabe 42)

(c) $U_3 := \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) = 0$ bis auf endlich viele $x\} \leq \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Beweisen Sie ihre Behauptung!

Aufgabe 46. Im folgenden seien V und W K-Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung.

(a) Wir definieren den Kokern als $\mathrm{Coker}(f) := W/\mathrm{Im}(f)$. Zeigen Sie, dass f genau dann surjektiv ist, wenn $\mathrm{Coker}(f) = 0$.

(b) Sei $W = V$ und $U \leq V$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie, dass $f(U) \subset U$ genau dann gilt, wenn $\overline{f} : V/U \to V/U$, $\overline{x} \mapsto \overline{f(x)}$ eine lineare Abbildung definiert.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. M. Schulze und R. Epure Sommersemester 2018

Grundlagen der Mathematik I
Blatt 12

Abgabetermin: Montag, 09.07.2018, 10:00 Uhr

Aufgabe 47.

(a) Bestimmen Sie alle möglichen Produkte der folgenden Matrizen über $\mathbb{Q}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & -7 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie alle Potenzen von $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$.

Aufgabe 48. Sei $V = \mathbb{R}^4$.

(a) Zeigen Sie, dass $B = (e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_3 - e_4, e_4)$ eine Basis von V ist.

(b) Ergänzen Sie die linear unabhängige Familie (e_1, e_2) mit Hilfe von Satz 15.13 **angewandt auf** B zu einer Basis von V.

(c) Sei $W = V/U$ mit $U = \langle e_1 + 2e_2, e_4 + 2e_3 \rangle$. Bestimmen Sie $\dim(W)$ und untersuchen Sie, ob $\overline{B} = (\overline{e_2 + e_3}, \overline{e_1 + e_4})$ eine Basis von W bildet.

Aufgabe 49. Sei K ein Körper und seien U, V, W endlich-erzeugte K-Vektorräume, sowie $f : U \to V$ und $g : V \to W$ lineare Abbildungen.

(a) Sei $Z \leq V$ ein beliebiger Untervektorraum von V. Zeigen Sie

$$\dim(f^{-1}(Z)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(Z \cap \mathrm{Im}(f)).$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\dim(\mathrm{Ker}(g \circ f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f)).$$

Aufgabe 50. Sei K ein Körper, V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und $U \leq V$ ein Untervektorraum. Ferner seien $B = (x_1, \ldots, x_k)$ und $C = (x_1, \ldots, x_n)$ Basen von U bzw. V, sodass $B' = (\overline{x_{k+1}}, \ldots, \overline{x_n})$ eine Basis von V/U ist. Wir betrachten $f : V \to V$ mit $f(U) \subset U$. Wir definieren die lineare Abbildung $g : U \to U,\ x \mapsto f(x)$ und die Abbildung $h : V/U \to V/U,\ \overline{x} \mapsto \overline{f(x)}$. Nach Aufgabe 46 (b) ist h eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung f bezüglich Start-und Zielbasis C dann die Blockform

$$A_f^{C,C} = \left(\begin{array}{c|c} A_g^{B,B} & * \\ \hline 0 & A_h^{B',B'} \end{array}\right)$$

hat, wobei "$*$" und "0" für Blöcke der Größe $k \times (n-k)$ bzw. $(n-k) \times k$ stehen, in denen alle Einträge beliebig bzw. 0 sind.

Prof. Dr. M. Schulze und R. Epure Sommersemester 2018

Grundlagen der Mathematik I
Blatt 13

Keine Abgabe

Aufgabe 51.

(a) Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$::

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & -7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 44 & 55 \\ 3 & 4 & 66 & 77 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

(b) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix} = -\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)$$

Aufgabe 52. Gegeben sei die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}.$$

Ferner bezeichnen E_1 und E_2 die kanonischen Basen von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$.
Seien

$$B_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ und } B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

ebenfalls Basen von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$. $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ sei eine weitere lineare Abbildung mit

$$A_g^{B_1,B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $A_f^{E_1,E_2}$.

(b) Geben Sie die Basiswechselmatrizen A^{B_1,E_1} und A^{B_2,E_2} an.

(c) Bestimmen Sie $A_f^{B_1,B_2}$ und $A_f^{E_1,B_2}$.

(d) Bestimmen Sie $A_g^{E_1,E_2}$.

Aufgabe 53. Sei K ein Körper und $m, n, p, r \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ und $B \in \mathrm{Mat}(n \times p, K)$ gilt

$$\mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(B) - n \leq \mathrm{rk}(AB) \leq \min(\mathrm{rk}(A), \mathrm{rk}(B)).$$

(b) Ist $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ eine Matrix von Rang $r \leq \min(m, n)$, dann gibt es Matrizen $B \in \mathrm{Mat}(m \times r, K)$ und $C \in \mathrm{Mat}(r \times n, K)$, sodass $A = BC$.

Hinweis zu (a): Verwenden Sie Aufgabe 49.

Aufgabe 54.

(a) Bestimmen Sie Basen von Bild und Kern folgender Matrizen über $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden reellen Gleichungssysteme, ggf. in Abhängigkeit vom Parameter $t \in \mathbb{R}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 12t \\ 2 & 12 & 7 & 12t+7 \\ 1 & 10 & 6 & 7t+8 \end{array}\right)$$