TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. M. Schulze und Raul Epure Wintersemester 2018/2019

Grundlagen der Mathematik II
Lösung zu Blatt 27

Abgabetermin: Keine Abgabe

Aufgabe 105.

(a) Bestimmen Sie geeignete Mengen $D, D' \subseteq \mathbb{R}^3$, sodass
$$f : D \to D', (r, \varphi, z) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z)$$
bijektiv ist.

(b) Berechnen Sie
$$\int_Z x^2 + y^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$
wobei $Z := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq R,\ 0 \leq z \leq H\} \subset \mathbb{R}^3$, mit $R, H \in \mathbb{R}_{>0}$.

Lösung.

(a) Wir suchen hier natürlich nicht-triviale Lösungen, d.h. die Mengen D und D' sollten möglichst groß sein. Wir setzen $D := \mathbb{R}_{>0} \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ und $D' := \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0\}$. Die Bijektivität ergibt sich sofort aus Beispiel 30.13, da die ersten zwei Komponenten den Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$ entsprechen und die dritte Komponente einfach nur der Identitätsabbildung entspricht.

(b) Es gilt:
$$f'(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Damit ist $\det f' = r$. Da $D' \cap Z$ nur um die Nullmenge $Z \cap (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\} \times \mathbb{R})$ von Z unterscheidet ist $\operatorname{vol}(Z) = \operatorname{vol}(D' \cap Z)$.

Damit gilt dann:
$$\begin{aligned} \int_Z x^2 + y^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \int_{Z \cap D'} x^2 + y^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_{f^{-1}(Z \cap D')} r^2 \cdot r \mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r \\ &= \int_0^{\sqrt{R}} \int_0^{2\pi} \int_0^H r^3 \mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r \\ &= 2\pi H \int_0^{\sqrt{R}} r^3 \mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{2}\pi H R^2 \end{aligned}$$

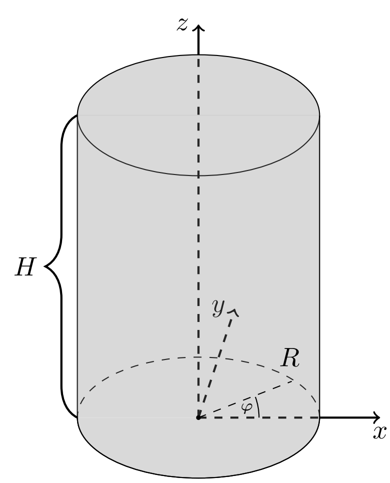

ABBILDUNG 1. Skizze der Menge Z.

Aufgabe 106. Es seien $f : D \to D'$ ein Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen $D, D' \subseteq \mathbb{R}^n$ sowie $K \subseteq D$ eine kompakte messbare Menge. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{vol}(f(K)) \leq \int_K |\det(f'(x))| \mathrm{d}x.$$

Lösung. Wir verwenden die Tatsache, dass Bilder kompakter, messbarer Mengen unter Diffeomorphismen messbar sind (siehe Folgerung 30.5). Zudem verwenden wir Satz 30.9, welcher besagt, dass für einen Quader $Q \subseteq D$ gilt:

$$\mathrm{vol}(f(Q)) \leq \int_Q |\det(f'(x))| \mathrm{d}x \tag{1}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Da K messbar ist existieren Quader $Q_1, \dots, Q_k$ mit $K \subseteq Q_1 \cup \ldots \cup Q_k$ und

$$\varepsilon + \int_K |\det f'(x)| \mathrm{d}x > \sum_{i=1}^{k} \sup_{x \in Q_i} (|\det f'(x)|) \cdot \mathrm{vol}(Q_i). \tag{2}$$

In diesem Fall erhält man:

$$\mathrm{vol}(f(K)) \overset{30.5}{\leq} \mathrm{vol}(f(Q_1 \cup \ldots \cup Q_k)) \leq \mathrm{vol}(f(Q_1) \cup \ldots \cup f(Q_k)) \leq \mathrm{vol}(f(Q_1)) + \ldots + \mathrm{vol}(f(Q_k)). \tag{3}$$

Da f ein Diffeomorphismus ist, also insbesondere stetig, folgt für einen Quader Q_i aus Aufgabe 96 (c) (Mittelwertsatz der mehrdimensionalen Integralrechnung für Quader) und Satz 30.9:

$$\mathrm{vol}(f(Q_i)) \overset{(1)}{\leq} \int_{Q_i} |\det f'(x)| \mathrm{d}x \overset{A96,(c)}{\leq} \sup_{x \in Q_i} (|\det f'(x)|) \cdot \mathrm{vol}(Q_i) \tag{4}$$

Dann gilt:

$$\mathrm{vol}(f(K)) \overset{(3)}{\leq} \sum_{i=1}^{k} \mathrm{vol}(f(Q_i)) \overset{(4)}{\leq} \sum_{i=1}^{k} \sup_{x \in Q_i} (|\det f'(x)|) \cdot \mathrm{vol}(Q_i) \overset{(2)}{<} \varepsilon + \int_K |\det f'(x)| \mathrm{d}x$$

Auf Grund der Tatsache, dass $\varepsilon > 0$ beliebig war, erhalten wir:

$$\mathrm{vol}(f(K)) \leq \int_K |\det(f'(x))| \mathrm{d}x.$$