Elementare Mathematik

Raul Epure
TU Kaiserslautern

2. Juni 2018

Vorwort

In den MINT Studiengängen tauchen Rechentechniken, wie binomische Formeln, das Bestimmen von Nullstellen von Polynomen und der Umgang mit rationalen Funktionen, regelmäßig auf. Ebenso spielen Potenzfunktionen, Logarithmen und Winkelfunktionen eine wichtige Rolle. Dozenten nehmen zu Beginn des Studiums oft implizit an, dass Studienanfänger sicher mit diesen Begriffen umgehen können. Die Realität sieht anders aus, denn viele Studienanfänger haben Schwierigkeiten mit diesen Begriffen. Aus genau diesem Grund ist dieses Skript im Wintersemester 2017/2018 an der TU Kaiserslautern entstanden. Es soll dazu dienen, Studienanfängern einen groben Überblick über elementare Mathematik zu geben, die von ihnen erwartet wird. Das Skript ist in zwei Teile aufgeteilt. Im ersten Teil werden elementare Rechentechniken vermittelt, die bei der Umformung von Gleichungen eine wichtige Rolle spielen. Der zweite Teil beschäftigt sich dann mit elementaren Funktionen und deren Anwendung bei der Umformung von komplizierteren Gleichungen. In den jeweiligen Abschnitten wird nicht viel Wert auf mathematische Präzision gelegt. Der Fokus liegt darauf, dass Tricks präsentiert und in Beispielen angewendet werden. Am Ende eines jeden Abschnitts sind Aufgaben beigefügt, damit der Leser das Gelernte einüben kann. Lösungsskizzen zu den Aufgaben sind am Ende des jeweiligen Teiles beigefügt, damit Ergebnisse verglichen werden können.
Als Vorlage, insbesondere für die enthaltenen Aufgaben, wurden die Bücher [GP97], [BL01] und [Lam00] benutzt. Eine weitere Quelle für Aufgaben, insbesondere zu binomischen Formeln, war die Internetseite www.poenitz-net.de.
Ich danke Florentine Kämmerer für ihre hilfreichen Anmerkungen.

Inhaltsverzeichnis

Teil I
Elementare Rechentechniken

In diesem Teil des Skriptes wollen wir elementare Rechentechniken kennenlernen. Ziel ist es hierbei einfache Terme umzuformen und Lösungen von nicht-linearen Gleichungen in einer Variablen zu bestimmen.

1 Grundlagen aus der Mittelstufe

1.1 Binomische Formeln

Bevor wir mit den wesentlichen Rechentechniken in diesem Skript anfangen wollen, müssen wir uns ganz kurz die drei grundlegenden Formeln hierfür anschauen, nämlich die **Binomischen Formeln**.

Formel 1.1 (Binomische Formeln) *Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gelten die folgenden Beziehungen:*

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ *und*
3. $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$.

Diese drei Formeln können uns in vielen Fällen helfen Terme wesentlich zu vereinfachen. Schauen wir uns dazu mal ein Beispiel an:

Beispiel 1.2 *Wir betrachten den Term $a^2b^2 - 6abc + 9c^2$ für $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dieser Term sieht zugegebenermaßen schrecklich aus. Man sollte sich hiervon jedoch nicht abschrecken lassen. Durch gezieltes Betrachten des mittleren Terms kann man folgendes erkennen:*

$$a^2b^2 - 6abc + 9c^2 = (ab)^2 - 2 \cdot ab \cdot 3c + (3c)^2.$$

Damit erhält man sofort

$$a^2b^2 - 6abc + 9c^2 = (ab - 3c)^2$$

und der Term ist wesentlich vereinfacht.

Oftmals sind die Aufgaben nicht ganz so einfach wie in Beispiel 1.2. Oftmals versucht man Terme zu **faktorisieren**. Dies bedeutet, dass man den gegebenen Term als Produkt von möglichst einfachen Termen schreiben will. Wir werden diese Idee in Abschnitt 2 wieder aufgreifen. Schauen wir uns mal ein Beispiel dazu an.

Beispiel 1.3 *Wir betrachten den Term $2a^3b - 2ab^3$. Unser Ziel ist es den Term zu faktorisieren. In diesem Fall ist das Vorgehen nicht allzu offensichtlich. Das Einzige was man relativ schnell erkennen kann, ist, dass man $2ab$ ausklammern kann:*

$$2a^3b - 2ab^3 = 2aba^2 - 2abb^2 = 2ab \cdot (a^2 - b^2).$$

Nun erkennt man sofort, dass wir die dritte binomische Formel anwenden können. Wir erhalten dann

$$2a^3b - 2ab^3 = 2ab(a+b)(a-b),$$

womit der Ausdruck faktorisiert ist.

1.2 Quadratische Gleichungen

Ein sehr bekanntes Problem aus der Mittelstufe ist das Finden von Nullstellen quadratischer Gleichungen. Der Einfachheit halber beginnen wir mit Gleichungen von Typ $x^2 + px + q = 0$, wobei $p, q \in \mathbb{R}$. Schauen wir uns ein Beispiel an.

Beispiel 1.4 *Betrachte die Gleichung $x^2 + 4x = -4$. Umstellen ergibt sofort*

$$x^2 + 4x + 4 = 0.$$

Anwenden der zweiten binomischen Formel ergibt nun

$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 = 0.$$

Nun sieht man, dass nur $x_1 = -2$ eine Lösung der Gleichung ist.

Leider ist das Leben nicht immer so einfach wie in Beispiel 1.4, jedoch kann man das Problem zum Finden von Lösungen quadratischer Gleichungen immer auf die Anwendung binomischer Formeln reduzieren. Diese Strategie nennt man quadratische Ergänzung.

Strategie 1.5 (Quadratische Ergänzung) *Gegeben sei eine Gleichung vom Typ $x^2 + px + q = 0$, wobei $p, q \in \mathbb{R}$. Diese lässt sich immer schreiben als*

$$x^2 + px + q = x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0.$$

Nun gilt aber $x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + (\frac{p}{2})^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$, womit sich die Gleichung dann zu Folgendem vereinfacht:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$$

Schauen wir uns mal ein Beispiel an.

Beispiel 1.6 *Gegeben sei die quadratische Gleichung $x^2 + 6x + 2 = 0$. Durch quadratische Ergänzung bringen wir diese auf die Gestalt*

$$(x + 3)^2 = 9 - 2 = 7.$$

Wurzel ziehen ergibt zwei Lösungen, nämlich

$$x_1 = \sqrt{7} - 3 \text{ und } x_2 = -\sqrt{7} - 3.$$

In Beispiel 1.6 erkennen wir übrigens eine kleine Tücke beim Lösen von quadratischen Gleichungen: man muss Wurzeln ziehen. In der Regel erhält man dabei zwei Lösungen. Man beachte folgenden Hinweis:

Hinweis 1.7 *Zieht man die Wurzel einer positiven reellen Zahl, so ist die Lösung* immer *eine positive reelle Zahl. Zum Beispiel ist $\sqrt{4} = 2$, jedoch gilt $\sqrt{4} \neq -2$. Betrachtet man hingegen eine **Gleichung** vom Typ $x^2 = a$, wobei a eine positive reelle Zahl ist, dann gilt:*

$$\sqrt{a} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Durch den Betrag erhält man nun als Lösungen $x_1 = \sqrt{a}$ und $x_2 = -\sqrt{a}$.

Mit Hilfe der quadratischen Ergänzung können wir nun ganz einfach eine Formel zum Lösen von quadratischen Gleichungen herleiten.

Formel 1.8 (p-q Formel) *Die Lösungen einer quadratischen Gleichung vom Typ* $x^2 + px + q = 0$ *mit* $p, q \in \mathbb{R}$ *sind von der Gestalt*

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

sofern die Lösungen existieren.

Beweis: Wendet man die quadratische Ergänzung auf den Ausdruck $x^2 + px + q = 0$ an, so erhält man den Ausdruck:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$$

Umstellen nach x ergibt unter Beachtung von Hinweis 1.7:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \text{ und } x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

□

Wir haben uns zunächst nur auf den speziellen Fall von Gleichungen vom Typ $x^2 + px + q = 0$ konzentriert, da der allgemeine Fall $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ dadurch gelöst werden kann, dass man die Gleichung schreibt als $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Als allgemeine Lösungsformel ergibt sich in diesem Fall.

Formel 1.9 (a-b-c Formel) *Die Lösungen einer quadratischen Gleichung vom Typ* $ax^2 + bx + c = 0$ *mit* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *und* $a \neq 0$ *sind von der Gestalt*

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

sofern die Lösungen existieren.

1.3 Aufgaben

Aufgabe 1.1 *Vereinfache folgende Terme soweit wie möglich.*

1. $36a^2 - 12a + 1$
2. $a^2b - 2ab^2 + b^3$
3. $\frac{4}{9}x^3 - \frac{9}{4}xy^2$
4. $\frac{3x^2+6x-72}{x+1}$
5. $\frac{a^2-25b^2}{a^2+10ab+25b^2}$
6. $\frac{x^2-64}{x^2-16x+64}$

Aufgabe 1.2 *Bestimme die Nullstellen der folgenden Polynomfunktionen.*

1. $p(x) = 4x^2 + 4x - 3$
2. $p(x) = x^3 - 2x^2 - 8x$
3. $p(x) = 4x^4 + 4x^3 - 3x^2$
4. $p(x) = 4x^4 - 24x^2 + 36$

2 Polynomgleichungen

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit Polynomgleichungen beschäftigen. Bevor wir damit anfangen, müssen wir uns mit einigen Grundlagen beschäftigen.

2.1 Grundlagen

Die wichtigste Grundlage ist der Begriff der Polynomfunktion.

Definition 2.1 *Für festes $n \in \mathbb{N}$ und für feste $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$ heißt die Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ **Polynomfunktion vom Grad** n. Gilt $a_n = 1$ so nennen wir p **normiert**. Die a_i heißen **Koeffizienten** von $p(x)$. Wir schreiben $\deg(p)$ für den Grad von p*.*

In Abschnitt 1.2 haben wir Polynomfunktionen vom Grad 2 betrachtet. In diesem Abschnitt wollen wir uns ansehen, was bei höheren Graden passiert. Im folgenden sei p immer eine normierte Polynomfunktion mit $\deg(p) = n$. Wir wollen Gleichungen vom Typ $p(x) = 0$ untersuchen, d.h. Nullstellen von Polynomfunktionen bestimmen. Die Idee wird es sein, durch geschicktes Faktorisieren p als Produkt von möglichst einfachen Polynomfunktionen zu schreiben, deren Nullstellen wir bereits kennen oder leicht berechnen können.

Schauen wir uns mal ein Beispiel an.

Beispiel 2.2 *Wir betrachten die Polynomfunktion $p(x) = x^3 - 14x^2 + 49x$. Was man ganz leicht erkennen kann ist, dass wir x als Faktor in jedem Summanden haben. Es gilt:*

$$x^3 - 14x^2 + 49x = x \cdot (x^2 - 14x + 49) = x \cdot (x - 7)^2.$$

Die Lösungen von $x \cdot (x - 7)^2 = 0$ kann man nun einfach ablesen, nämlich $x_1 = 0$ und $x_2 = 7$.

In Beispiel 2.2 haben wir versteckt folgenden Fakt benutzt, welchen wir gleich noch benötigen werden.

Fakt 2.3 *Ist $p(x)$ eine Polynomfunktion und lässt sich diese schreiben als $p(x) = f(x) \cdot g(x)$, so gilt:*

$$p(x) = 0 \text{ genau dann, wenn } f(x) = 0 \text{ oder } g(x) = 0.$$

Fakt 2.3 ist in der Hinsicht wichtig, dass wir beim Berechnen von Nullstellen von Polynomfunktionen niemals durch einen Faktor teilen sollten, sondern **immer** die Nullstellen der jeweiligen Faktoren bestimmen sollten. Üblicherweise zerlegt man eine Polynomfunktion so, dass f und g ebenfalls Polynomfunktionen sind. In diesem Fall gilt folgender Fakt:

Fakt 2.4 *Ist $p(x)$ eine Polynomfunktion mit $\deg(p) = n$ und $p(a) = 0$ für ein $a \in \mathbb{R}$. Dann lässt sich $p(x)$ schreiben als*

$$p(x) = q(x) \cdot (x - a),$$

wobei $q(x)$ eine Polynomfunktion mit $\deg(q) = n - 1$ ist. Insbesondere hat eine Polynomfunktion vom Grad n maximal n Nullstellen.

Schauen wir uns mal ein Beispiel an:

*deg kommt vom englischen Wort "degree" und heißt Grad.

Beispiel 2.5 *Wir betrachten die Polynomfunktion $p(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$. Für diesen Fall haben wir zunächst nichts in der Hand. Wir versuchen einfach mal zu raten... Es gilt $p(0) = 4 \neq 0, p(-1) = -2, p(1) = 0, p(-2) = 0$ und $p(2) = 0$. Damit haben wir 3 Nullstellen erraten. Fakt 2.4 verrät uns nun, dass wir fertig sind. Weiterhin liefert Fakt 2.4 uns die Faktorisierung von $p(x)$. Es gilt:*

$$p(x) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x+2).$$

In Beispiel 2.5 ist eine Strategie zum Finden von Nullstellen versteckt. Betrachten wir ein weiteres Beispiel, in welchem die Polynomfunktion bereits faktorisiert ist:

Beispiel 2.6 *Gegeben sei die Polynomfunktion $p(x) = (x-5) \cdot (x-3) \cdot (x+7)$. Man sieht durch Ausmultiplizieren, dass $a_0 = (-5) \cdot (-3) \cdot 7 = 105$ gilt und unsere Nullstellen alles Teiler von 105 sind.*

Aus Beispiel 2.6 können wir entnehmen, dass Teiler von a_0 mögliche Kandidaten für Nullstellen einer Polynomfunktion sind, sofern die Koeffizienten von $p(x)$ ganzzahlig sind.

Strategie 2.7 *Sei $p(x)$ eine normierte Polynomfunktion mit ganzzahligen Koeffizienten. Dann sind die Teiler von a_0 mögliche Kandidaten für Nullstellen von $p(x)$.*

Im nächsten Beispiel wollen wir sehen, wie wir durch geschickte Umbenennung einer Variable, eine sogenannte **Substitution**, Polynomfunktionen mit einem Grad größer als 2 auf den Grad 2 Fall reduzieren können.

Beispiel 2.8 *Gegeben sei die Polynomfunktion $p(x) = x^4 - 7x^2 + 12$. Durch genaues Hinschauen können wir erkennen, dass $p(x)$ eine quadratische Polynomfunktion in x^2 ist. Es bietet sich also an diesem Ausdruck eine eigene Bezeichnung zu geben, ihn also zu* ***substituieren****. Wir setzen $t = x^2$. Dann erhalten wir*

$$p(t) = t^2 - 7t + 12.$$

Die Lösungen lauten $t_1 = 4$ und $t_2 = 3$. Durch Wurzelziehen erhalten wir dann:

$$x_{1,2} = \pm 2 \text{ und } x_{3,4} = \pm\sqrt{3}.$$

2.2 Polynomdivision

In diesem Unterabschnitt wollen wir sehen, wie wir, nachdem wir eine Nullstelle einer Polynomfunktion erraten haben, die Gestalt aus Fakt 2.4 erhalten. Unsere Strategie besteht darin, die Division mit Rest, die aus der Grundschule bekannt ist, auf Polynomfunktionen zu verallgemeinern. Die Idee bei der schriftlichen Division mit ganzen Zahlen war es, zu schauen, wie oft "Teile" der ganzen Zahl, durch die wir teilen möchten (der sogenannte **Divisor**), in die ganze Zahl passt, die geteilt werden soll (der sogenannte **Dividend**). Im Anschluss daran wird der Dividend betragsmäßig kleiner und wir können das Verfahren solange fortsetzen, bis der Dividend den Wert 0 annimmt. Bei Polynomfunktionen misst der Grad die "Größe", sodass das Ziel darin besteht, den Grad vom Dividenden in jedem Schritt zu verkleinern. Hierzu muss der Grad des Divisors natürlich kleiner oder gleich dem des Dividenden sein. Sei der Dividend $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ und der Divisor $q(x) = b_m x^m + b_{n-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ mit $m \leq n$. Um den Grad des Dividenden zu verkleinern, müssen wir nun einfach $\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} q(x)$ von $p(x)$ abziehen und erhalten eine Polynomfunktion kleineren Grades. Das Verfahren wiederholen wir solange, bis der dabei entstandene Dividend 0 ist.

Schauen wir uns ein Beispiel an, um besser zu verstehen, wie das Verfahren funktioniert:

Beispiel 2.9 *Betrachte die Polynomfunktion $p(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ aus Beispiel 2.5. Wir wissen, dass $a = 1$ eine Nullstelle ist. Wegen Fakt 2.4 wissen wir, dass $q(x) = x - 1$ die Polynomfunktion $p(x)$ teilt. Wir multiplizieren zunächst $q(x)$ mit x^2 und ziehen dann $x^2 \cdot q(x) = x^3 - x$ von $p(x)$ ab. Als Schema schreiben wir dies folgendermaßen:*

$$
\begin{array}{rrrl}
(\;\; x^3 & -\, x^2 & -\, 4x & +\, 4) : (x-1) = x^2 \\
\underline{-\, x^3} & \underline{+\, x^2} & & \\
 & & -\, 4x & +\, 4
\end{array}
$$

Im nächsten Schritt müssen wir die Polynomfunktion $\tilde{p}(x) = -4x + 4$ durch $q(x)$ teilen. Wir können weitermachen, da $\deg(\tilde{p}(x)) = 1 \geq \deg(q(x))$ gilt. Wir multiplizieren $q(x)$ mit -4 und erhalten:

$$
\begin{array}{rrrl}
(\;\; x^3 & -\, x^2 & -\, 4x & +\, 4) : (x-1) = x^2 - 4 \\
\underline{-\, x^3} & \underline{+\, x^2} & & \\
 & & -\, 4x & +\, 4 \\
 & & \underline{4x} & \underline{-\, 4} \\
 & & & 0
\end{array}
$$

Nach diesem Schritt sind wir fertig, da wir 0 als Polynomfunktion erhalten haben. Damit ist $x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x^2 - 4) \cdot (x - 1)$. In diesem speziellen Fall können wir sofort die ganze Faktorisierung angeben, da wir die dritte binomische Formel kennen. Wir erhalten:

$$p(x) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x+2).$$

Was machen wir aber, wenn wir den Grad vom Dividenden kleiner als den Grad des Divisors gemacht haben? In der Grundschule haben wir dann einfach aufgehört und das was übrig geblieben ist als **Rest** bezeichnet. Das machen wir bei Polynomfunktionen auch so.

Schauen wir uns dazu ein Beispiel an:

Beispiel 2.10 *Betrachte die Polynomfunktion $p(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ aus Beispiel 2.5. Wir wollen diesmal durch eine andere Polynomfunktion als $(x - 1)$ teilen, damit wir sehen, wie das Schema abläuft. Wir wählen hierzu $q(x) = x + 3$. Im ersten Schritt ziehen wir $x^2(x + 3)$ von $p(x)$ ab:*

$$
\begin{array}{rrrl}
(\;\; x^3 & -\, x^2 & -\, 4x & +\, 4) : (x+3) = x^2 \qquad + \dfrac{}{x+3} \\
\underline{-\, x^3} & \underline{-\, 3x^2} & & \\
 & -\, 4x^2 & -\, 4x &
\end{array}
$$

Das $\frac{}{x+3}$ bedeutet, dass ein möglicher Rest übrig bleiben kann, welcher dann als Zähler an dieser Stelle erscheint. Im nächsten Schritt ziehen wir $-4x \cdot (x + 3)$ von $-4x^2 - 4x$ ab. Wir erhalten:

$$
\begin{array}{rrrl}
(\;\; x^3 & -\, x^2 & -\, 4x & +\, 4) : (x+3) = x^2 - 4x \qquad + \dfrac{}{x+3} \\
\underline{-\, x^3} & \underline{-\, 3x^2} & & \\
 & -\, 4x^2 & -\, 4x & \\
 & \underline{4x^2} & \underline{+\, 12x} & \\
 & & 8x & +\, 4
\end{array}
$$

Im nächsten Schritten ziehen wir von $8x + 4$ die Polynomfunktion $8 \cdot (x + 3)$ ab und erhalten:

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 \ - x^2 \ - 4x \ + 4\big) : \big(x + 3\big) = x^2 - 4x + 8 + \dfrac{-20}{x+3} \\
\underline{- x^3 - 3x^2} \\
\qquad - 4x^2 \ - 4x \\
\qquad \underline{\ \ 4x^2 + 12x} \\
\qquad\qquad\quad 8x \ + 4 \\
\qquad\qquad \underline{- 8x - 24} \\
\qquad\qquad\qquad - 20
\end{array}
$$

Nun ist der Grad von -20 kleiner als der von $x+3$ und wir hören auf. Es bleibt die Restfunktion $r(x) = -20$ übrig. Wir erhalten dann:

$$p(x) = (x^2 - 4x + 8) \cdot (x + 3) - 20.$$

2.3 Aufgaben

Aufgabe 2.1 *Führe die folgenden Polynomdivisionen aus.*

1. $(x^3 + 2x^2 - 17x + 6) : (x - 3)$
2. $(2x^3 + 2x^2 - 21x + 12) : (x + 4)$
3. $(x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 12x - 8) : (x^2 - 2)$
4. $(2x^4 - 9x^3 + 27x^2 - 31x + 12) : (x^2 - 2x + 1)$

Aufgabe 2.2 *Bestimme die Nullstellen der folgenden Polynomfunktionen.*

1. $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
2. $p(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$
3. $p(x) = 4x^3 - 8x^2 - 11x - 3$
4. $p(x) = 4x^3 - 20x^2 - x + 110$
5. $p(x) = 32x^4 - 2x^2 - 9$
6. $p(x) = x^6 - 19x^3 - 216$

3 Anwendungen

3.1 Rationale Funktionen

Nachdem wir uns mit Polynomfunktionen beschäftigt haben, werden wir uns als nächstes mit Brüchen von Polynomfunktionen beschäftigen. Hierbei werden wir alle Tricks, die wir bis jetzt kennengelernt haben, anwenden. Beginnen wir mit der grundlegenden Definition dieses Abschnitts.

Definition 3.1 *Seien $p(x)$ und $q(x)$ Polynomfunktionen. Bezeichne mit N die Nullstellenmenge von $q(x)$. Eine Funktion vom Typ $f : \mathbb{R}\backslash N \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ heißt* ***rationale Funktion****.*

Rationale Funktionen sind sehr interessant, wenn man Kurvendiskussionen durchführt oder wenn sich für bestimmte Integrale interessiert. Dieser Typ von Funktionen taucht sehr oft in der Physik und in den Ingenieurswissenschaften auf, zum Beispiel beim Betrachten von elektrischen Widerständen in komplizierten Schaltkreisen. Hierbei ist es sehr wichtig, dass wir die Gestalt solcher Funktionen vereinfachen. Dabei ignorieren wir zunächst die Definitionslücken des Nenners, da diese gegebenenfalls verschwinden und wir so den Definitionsbereich der rationalen Funktion vergrößern können. Wir schauen uns hierzu mal zwei Beispiele an.

Beispiel 3.2 *Sei $f(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$. Die Funktion sieht schon einfach aus, jedoch wünschen wir uns in der Regel, dass der Grad des Zählers echt kleiner als der Grad des Nenners ist. In diesem Fall können wir quadratische Ergänzung anwenden:*

$$\frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+1-1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2-1}{(x+1)^2} = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Schauen wir uns als nächstes ein aufwendigeres Beispiel an.

Beispiel 3.3 *Sei $f(x) = \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2+2x-3}$. Als erstes versuchen wir die Nullstellen des Nenners $q(x)$ zu finden. Da $q(x)$ eine Polynomfunktion mit ganzzahligen Koeffizienten ist, probieren wir zunächst alle möglichen Teiler von 3 als Nullstellen. Durch Nachrechnen stellt man fest, dass 1 und -3 die Nullstellen sind. Es gilt also*

$$q(x) = (x-1)(x+3).$$

Führen wir dies für den Zähler $p(x)$ durch, so erhalten wir das 1 ebenfalls eine Nullstelle ist. Polynomdivision ergibt dann

$$\begin{array}{l}
(\;x^3 - 2x^2 - x + 2) : (x-1) = x^2 - x - 2. \\
\underline{-x^3 + x^2} \\
\quad -x^2 - x \\
\quad \underline{\;\;x^2 - x} \\
\qquad -2x + 2 \\
\qquad \underline{\;\;2x - 2} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Damit vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$f(x) = \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2+2x-3} = \frac{(x-1)(x^2-x-2)}{(x-1)(x+3)} = \frac{x^2-x-2}{x+3}.$$

Der neue Zähler hat -3 nicht als Nullstelle. Des Weiteren ist keine offensichtliche Umformung möglich, die es uns ermöglicht, den Ausdruck wie in Beispiel 3.2 weiter zu vereinfachen. An dieser Stelle hilft nur nochmalige Polynomdivision, wobei wir diesmal einen von 0 verschiedenen Rest erhalten. Es ergibt sich:

$$
\begin{array}{l}
(\quad x^2 \; - x \; - 2) : (x+3) = x - 4 + \dfrac{10}{x+3}. \\
\underline{-x^2 - 3x} \\
\qquad\; -4x \; - 2 \\
\qquad\; \underline{\;4x + 12} \\
\qquad\qquad\;\; 10
\end{array}
$$

Damit erhalten wir

$$f(x) = x - 4 + \frac{10}{x+3}.$$

3.2 Kreise und Ellipsen

Im folgenden Unterabschnitt wollen wir uns mit Kreisen beschäftigen. Schauen wir uns zunächst einmal die Definition an.

Definition 3.4 *Ein **Kreis** K ist die Menge aller Punkte $P = (x, y)$, welche die **Kreisgleichung***

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

erfüllen. Hierbei ist $M = (x_0, y_0)$ der Mittelpunkt des Kreises und $r \in \mathbb{R}_{>0}$ der Kreisradius.

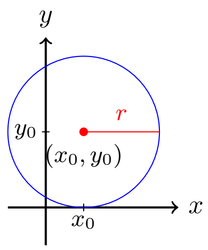


Abbildung 1: Skizze zu Definition 3.4.

Oftmals besteht die Schwierigkeit darin, aus einer gegebenen Gleichung in zwei Variablen zu entscheiden, ob ein Kreis vorliegt oder nicht. Schauen wir uns dazu mal zwei Beispiele an.

Beispiel 3.5 *Wir betrachten die Gleichung*

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y + 8 = 0.$$

Der Trick besteht darin, quadratische Ergänzung auf die Terme in x und y getrennt anzuwenden. In diesem Fall ergibt sich:

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y + 8 = x^2 + 4x + 4 - 4 + y^2 - 6y + 9 - 9 + 8.$$

Anwenden der binomischen Formeln führt zu

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y + 8 = (x+2)^2 + (y-3)^2 - 5 = 0.$$

Umstellen ergibt die Gleichung:

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 5.$$

Somit haben wir einen Kreis mit Mittelpunkt $M = (-2, 3)$ *und Radius* $r = \sqrt{5}$.

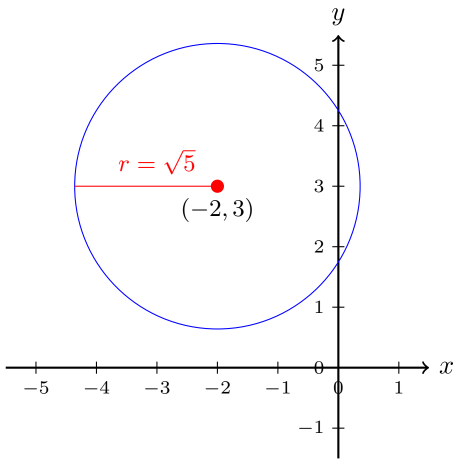


Abbildung 2: Skizze zu Beispiel 3.5.

Schauen wir uns mal ein Beispiel an, bei dem kein Kreis entsteht.

Beispiel 3.6 *Wir betrachten die Gleichung* $x^2 - 4x + 2y^2 + 8y + 5 = 0$. *Derselbe Trick wie in Beispiel 3.5 liefert:*

$$(x-2)^2 + 2 \cdot (y+2)^2 = 4.$$

Dies ist keine Kreisgleichung mehr. Wenn man dieses Objekt zeichnet kommt dabei folgendes heraus:

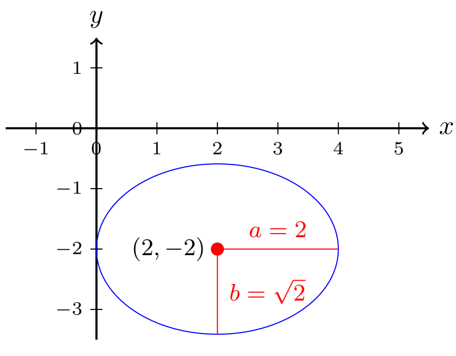


Abbildung 3: Skizze zu Beispiel 3.6.

Das Objekt was in Beispiel 3.6 beschrieben wird ist eine Ellipse. Diese sind wie folgt definiert:

Definition 3.7 *Eine* ***Ellipse*** *E ist die Menge aller Punkte $P = (x, y)$, welche die* ***Ellipsengleichung***

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

erfüllen. Hierbei ist $M = (x_0, y_0)$ der Mittelpunkt der Ellipse und $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ sind die Längen der ***Halbachsen****.*

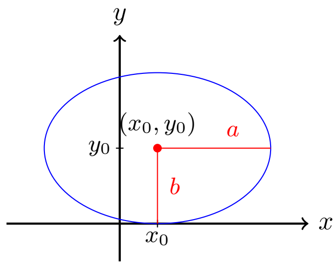


Abbildung 4: Skizze zu Definition 3.7.

Hinweis 3.8 *Beachte, dass Kreise spezielle Ellipsen sind! Im Fall, dass beide Halbachsen denselben Wert annehmen, erhalten wir aus der Ellipsengleichung sofort die Kreisgleichung.*

3.3 Aufgaben

Aufgabe 3.1 *Vereinfache folgende Terme soweit wie möglich.*

1. $\frac{x^2+4x+3}{x^2+7x+12}$
2. $\frac{x^3-8}{x-2}$
3. $\frac{3x^2-x+7}{3x^2-2x}$
4. $\frac{x^3-x^2+2x-8}{x^2-4}$
5. $\frac{x^6-10x^3+25}{x^3-5}$
6. $\frac{2x-4t}{x^2+tx-6t^2}$

Aufgabe 3.2 *Untersuche, ob durch folgende Gleichungen ein Kreis beschrieben wird, und bestimme gegebenenfalls Mittelpunkt und Radius.*

1. $x^2 + y^2 + 4x + 8y + 11 = 0$
2. $x^2 + y^2 + 1 = 0$
3. $x^2 + y^2 - 2x = -4$
4. $x^2 + y^2 + 6x - 1 - 4y - 2 = 0$

Lösungen zu den Aufgaben

Aufgabe 1.1

1. Mit der zweiten binomischen Formel erhält man sofort

$$36a^2 - 12a + 1 = (6a-1)^2.$$

2. Es gilt $a^2b - 2ab^2 + b^3 = b \cdot (a^2 - 2ab + b^2)$. Mit der zweiten binomischen Formel erhält man dann:

$$a^2b - 2ab^2 + b^3 = b \cdot (a-b)^2.$$

3. Es gilt $\frac{4}{9}x^3 - \frac{9}{4}xy^2 = x \cdot \left(\frac{4}{9}x^2 - \frac{9}{4}y^2\right)$. Anwenden der dritten binomischen Formel ergibt dann:

$$\frac{4}{9}x^3 - \frac{9}{4}xy^2 = x \cdot \left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}y\right) \cdot \left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}y\right).$$

4. Zunächst betrachten wir den Zähler. Es gilt $3x^2 + 6x - 72 = 3 \cdot (x^2 + 2x - 24)$. Dies lässt sich durch quadratische Ergänzung vereinfachen zu

$$3 \cdot (x^2 + 2x - 24) = 3 \cdot (x^2 + 2x + 1 - 25) = 3 \cdot (x+1)^2 - 75.$$

Hiermit ergibt sich für den Bruchterm:

$$\frac{3x^2 + 6x - 72}{x+1} = 3x + 3 - \frac{75}{x+1}.$$

5. Im Zähler verwenden wir die dritte binomische Formel und es ergibt sich $a^2 - 25b^2 = (a-5b)\cdot(a+5b)$. Im Nenner können wir die erste binomische Formel verwenden und wir erhalten $a^2 + 10ab + 25b^2 = (a+5b)^2$. Für den gesamten Bruchterm erhält man somit:

$$\frac{a^2 - 25b^2}{a^2 + 10ab + 25b^2} = \frac{(a-5b)\cdot(a+5b)}{(a+5b)^2} = \frac{a-5b}{a+5b}.$$

6. Im Zähler verwenden wir die dritte binomische Formel und es ergibt sich $x^2 - 64 = (x-8)\cdot(x+8)$. Im Nenner können wir die zweite binomische Formel verwenden und wir erhalten $x^2 - 16x + 64 = (x-8)^2$. Für den gesamten Bruchterm erhält man somit:

$$\frac{x^2 - 64}{x^2 - 16x + 64} = \frac{(x-8)\cdot(x+8)}{(x-8)^2} = \frac{x+8}{x-8}.$$

Durch geschicktes Addieren im Zähler erhalten wir:

$$\frac{x+8}{x-8} = \frac{x - 8 + 16}{x-8} = 1 + \frac{16}{x-8}.$$

Aufgabe 1.2

1. In diesem Fall können wir sofort die a-b-c Formel verwenden. Es gilt:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{8} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{8} = -\frac{1}{2} \pm \frac{8}{8} = -\frac{1}{2} \pm 1.$$

2. Es fällt auf, dass wir x ausklammern können, womit $x_1 = 0$ bereits eine Nullstelle ist. Auf den Faktor $x^2 - 2x - 8$ wenden wir die p-q Formel an. Es gilt:
$$x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{1+8} = 1 \pm \sqrt{9} = 1 \pm 3.$$

3. Wieder erkennen wir, dass wir x^2 ausklammern können, womit $x_1 = 0$ eine Nullstelle ist. Der Faktor $4x^2 + 4x - 3$ ist uns bereits aus Teilaufgabe 1 bekannt, sodass wir sofort wissen, dass
$$x_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm 1$$
gilt.

4. Diese Aufgabe ist etwas kniffliger. Zunächst können wir die 4 ausklammern und erhalten als übrig gebliebenen Faktor $x^4 - 6x^2 + 9$. Dieser lässt sich mit der zweiten binomischen Formel vereinfachten zu
$$x^4 - 6x^2 + 9 = (x^2 - 3)^2.$$
Damit müssen wir nur noch die Nullstellen von $x^2 - 3$ bestimmen, welche jedoch sofort ablesbar sind. Es sind
$$x_{1,2} = \pm\sqrt{3}.$$

Aufgabe 2.1

1. Es gilt:
$$\begin{array}{l}
\big(x^3 + 2x^2 - 17x + 6\big) : \big(x - 3\big) = x^2 + 5x - 2. \\
\underline{-x^3 + 3x^2} \\
\qquad 5x^2 - 17x \\
\qquad \underline{-5x^2 + 15x} \\
\qquad\qquad -2x + 6 \\
\qquad\qquad \underline{2x - 6} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

2. Es gilt:
$$\begin{array}{l}
\big(2x^3 + 2x^2 - 21x + 12\big) : \big(x + 4\big) = 2x^2 - 6x + 3. \\
\underline{-2x^3 - 8x^2} \\
\qquad -6x^2 - 21x \\
\qquad \underline{6x^2 + 24x} \\
\qquad\qquad 3x + 12 \\
\qquad\qquad \underline{-3x - 12} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

3. Es gilt:

$$\begin{array}{l}
\big(\; x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 12x - 8\big) : \big(x^2 - 2\big) = x^2 - 6x + 4. \\
\underline{-\, x^4 \qquad\quad + 2x^2} \\
\qquad \;\; -\, 6x^3 + 4x^2 + 12x \\
\qquad \;\; \underline{\;\; 6x^3 \qquad\quad - 12x} \\
\qquad\qquad\qquad 4x^2 \qquad\; - 8 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-\, 4x^2 \qquad\; + 8} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\; 0
\end{array}$$

4. Es gilt:

$$\begin{array}{l}
\big(\; 2x^4 - 9x^3 + 27x^2 - 31x + 12\big) : \big(x^2 - 2x + 1\big) = 2x^2 - 5x + 15 + \dfrac{4x-3}{x^2-2x+1}. \\
\underline{-\, 2x^4 + 4x^3 \;\; - 2x^2} \\
\qquad\quad -\, 5x^3 + 25x^2 - 31x \\
\qquad\quad \underline{\;\; 5x^3 - 10x^2 \;\; + 5x} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 15x^2 - 26x + 12 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-\, 15x^2 + 30x - 15} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; 4x \;\; - 3
\end{array}$$

Aufgabe 2.2

1. Durch Raten erhalten wir sofort $p(1) = 0$, womit $x_1 = 1$. Wir führen dann Polynomdivision durch und erhalten:

$$\begin{array}{l}
\big(\; x^3 - 6x^2 + 11x - 6\big) : \big(x - 1\big) = x^2 - 5x + 6. \\
\underline{-\, x^3 \;\; + x^2} \\
\qquad -\, 5x^2 + 11x \\
\qquad \underline{\;\; 5x^2 \;\; - 5x} \\
\qquad\qquad\qquad 6x - 6 \\
\qquad\qquad \underline{\;\; -\, 6x + 6} \\
\qquad\qquad\qquad\quad\;\; 0
\end{array}$$

Die Nullstellen von $x^2 - 5x + 6$ berechnen sich mit der p-q Formel zu:

$$x_{2,3} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}.$$

2. Durch Raten erhalten wir sofort $p(2) = 0$, womit $x_1 = 2$. Wir führen dann Polynomdivision durch und erhalten:

$$\begin{array}{l}
\big(\; x^3 \;\; + x^2 - 4x - 4\big) : \big(x - 2\big) = x^2 + 3x + 2. \\
\underline{-\, x^3 + 2x^2} \\
\qquad\quad 3x^2 - 4x \\
\qquad \underline{-\, 3x^2 + 6x} \\
\qquad\qquad\quad 2x - 4 \\
\qquad\qquad \underline{-\, 2x + 4} \\
\qquad\qquad\qquad\;\; 0
\end{array}$$

Die Nullstellen von x^2+3x+2 berechnen sich mit der p-q Formel zu:

$$x_{2,3} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}.$$

3. Durch Raten erhalten wir sofort $p\left(-\frac{1}{2}\right)=0$, womit $x_1 = -\frac{1}{2}$. Wir führen dann Polynomdivision durch und erhalten:

$$\begin{array}{l}
\big(\ \ 4x^3 - 8x^2 - 11x - 3\big) : \left(x+\tfrac{1}{2}\right) = 4x^2 - 10x - 6.\\
\underline{-4x^3 - 2x^2}\\
\qquad\quad -10x^2 - 11x\\
\qquad\quad \underline{\ \ 10x^2 + 5x}\\
\qquad\qquad\qquad -6x - 3\\
\qquad\qquad\qquad \underline{\ \ \ 6x + 3}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\ 0
\end{array}$$

Die Nullstellen von $4x^2 - 10x - 6$ berechnen sich mit der a-b-c Formel zu:

$$x_{2,3} = \frac{10 \pm 14}{8}.$$

4. Durch Raten erhalten wir sofort $p(-2)=0$, womit $x_1 = -2$. Wir führen dann Polynomdivision durch und erhalten:

$$\begin{array}{l}
\big(\ \ 4x^3 - 20x^2 \quad - x + 110\big) : (x+2) = 4x^2 - 28x + 55.\\
\underline{-4x^3 - 8x^2}\\
\qquad\quad -28x^2 \quad - x\\
\qquad\quad \underline{\ \ 28x^2 + 56x}\\
\qquad\qquad\qquad 55x + 110\\
\qquad\qquad\qquad \underline{-55x - 110}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Versucht man die Nullstellen von $4x^2 - 28x + 55$ mit der a-b-c Formel zu berechnen, so erhält man den Ausdruck:

$$\sqrt{28^2 - 16 \cdot 55} = \sqrt{-96}.$$

Somit ist $x_1 = -2$ die einzige Nullstelle.

5. Bei dieser Funktion erkennen wir, dass wir $t = x^2$ setzen können. Die Nullstellen von $32t^2 - 2t - 9$ ergeben sich zu:

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm 34}{64}.$$

Damit ist

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{36}{64}} = \pm\frac{3}{4}$$

die einzige Lösung, da die Gleichung $x^2 = -\frac{32}{64}$ keine reelle Lösung besitzt.

6. Bei dieser Funktion erkennen wir, dass wir $t = x^3$ setzen können. Die Nullstellen von $t^2 - 19t - 216$ ergeben sich zu:
$$t_{1,2} = \frac{19 \pm 35}{2}.$$
Damit sind
$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = 3 \text{ und } x_2 = \sqrt[3]{-\frac{16}{2}} = -2$$
die Lösungen.

Aufgabe 3.1

1. Wir ergänzen den Zähler, sodass wir $x^2 + 4x + 3 = x^2 + 7x + 12 - 3x - 9$ erhalten. Dann gilt:
$$\frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 7x + 12} = \frac{x^2 + 7x + 12 - 3x - 9}{x^2 + 7x + 12} = 1 - 3 \cdot \frac{x + 3}{x^2 + 7x + 12}.$$
Nun ist $a = -3$ eine Nullstelle von $x^2 + 7x + 12$, womit sich durch Polynomdivision folgendes ergibt:
$$\begin{array}{l} \big(\;\; x^2 + 7x + 12\big) : \big(x + 3\big) = x + 4. \\ \underline{-\,x^2 - 3x} \\ \qquad\quad 4x + 12 \\ \qquad\; \underline{-\,4x - 12} \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$
Damit gilt:
$$\frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 7x + 12} = 1 - \frac{3}{x + 4}.$$

2. Wir erkennen sofort, dass $a = 2$ eine Nullstelle von $x^3 - 8$ ist. Polynomdivision liefert sofort:
$$\begin{array}{l} \big(\;\; x^3 \qquad\qquad\quad - 8\big) : \big(x - 2\big) = x^2 + 2x + 4. \\ \underline{-\,x^3 + 2x^2} \\ \qquad\quad 2x^2 \\ \qquad\; \underline{-\,2x^2 + 4x} \\ \qquad\qquad\quad 4x - 8 \\ \qquad\qquad\; \underline{-\,4x + 8} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$
Damit ist
$$\frac{x^3 - 8}{x - 2} = x^2 + 2x + 4.$$

3. Wir ändern den Zähler etwas ab und erhalten $3x^2 - x + 7 = 3x^2 - 2x + x + 7$. Damit vereinfacht sich der Bruchterm zu:
$$\frac{3x^2 - x + 7}{3x^2 - 2x} = \frac{3x^2 - 2x + x + 7}{3x^2 - 2x} = 1 + \frac{x + 7}{3x^2 - 2x}.$$

4. An dieser Stelle wenden wir direkt Polynomdivision an. Es gilt:

$$\begin{array}{l} \big(\quad x^3 - x^2 + 2x \quad - 8\big) : \big(x^2 - 4\big) = x - 1 + \dfrac{6x - 12}{x^2 - 4}. \\ \underline{-x^3 \qquad\quad + 4x} \\ \qquad \underline{-x^2 + 6x \quad - 8} \\ \qquad\quad x^2 \qquad\quad - 4 \\ \qquad\qquad\quad 6x - 12 \end{array}$$

Der Zähler im neuen Bruchterm vereinfacht sich zu $6 \cdot (x-2)$ und der Nenner zu $(x-2)\cdot(x+2)$. Damit erhalten wir:

$$\frac{x^3 - x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4} = x - 1 + \frac{6}{x+2}.$$

5. Wir erkennen, dass der Zähler mit Hilfe der zweiten binomischen Formel vereinfacht werden kann. Es ergibt sich $x^6 - 10x^3 + 25 = (x^3 - 5)^2$. Damit vereinfacht sich der gesamte Ausdruck zu

$$\frac{x^6 - 10x^3 + 25}{x^3 - 5} = x^3 - 5.$$

6. Dieses Beispiel ist etwas gemein. Im Zähler Klammern wir die 2 aus und erhalten $x - 2t$ als neuen Zähler. Setzen wir in $x^2 + tx - 6t^2$ für $x = 2t$ erhält man, dass $2t$ eine Nullstelle ist. Polynomdivision ergibt:

$$\begin{array}{l} \big(\quad x^2 \quad + tx - 6t^2\big) : \big(x - 2t\big) = x + 3t. \\ \underline{-x^2 + 2tx} \\ \qquad\quad 3tx - 6t^2 \\ \qquad \underline{-3tx + 6t^2} \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Damit vereinfacht sich unser Ausdruck zu:

$$\frac{2x - 4t}{x^2 + tx - 6t^2} = \frac{2}{x + 3t}.$$

Aufgabe 3.2

1. Wir führen quadratische Ergänzung aus und erhalten:

$$x^2 + y^2 + 4x + 8y + 11 = x^2 + 4x + 4 + y^2 + 8y + 16 - 9 = 0.$$

Damit erhalten wir die folgende Kreisgleichung:

$$(x+2)^2 + (y+4)^2 = 9.$$

Somit ist Mittelpunkt $M = (-2, -4)$ und der Radius $r = 3$.

2. Diese Gleichung beschreibt keinen Kreis, da wir keine Lösungen für x und y finden können, welche die Gleichung

$$x^2 + y^2 = -1$$

erfüllen.

3. Wir führen quadratische Ergänzung aus und erhalten:

   $$x^2 + y^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 1 = -4.$$

   Damit erhalten wir die folgende Gleichung:

   $$(x-1)^2 + y^2 = -3.$$

   Diese beschreibt keinen Kreis, da wir auf der rechten Seite der Gleichung eine positive Zahl benötigen.

4. Wir führen quadratische Ergänzung aus und erhalten:

   $$x^2 + y^2 + 6x - 1 - 4y - 2 = x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 - 16 = 0.$$

   Damit erhalten wir die folgende Kreisgleichung:

   $$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 16.$$

   Somit ist Mittelpunkt $M = (-3, 2)$ und der Radius $r = 4$.

Teil II
Elementare Funktionen

In diesem Teil des Skriptes wollen wir elementare Funktionen betrachten. Ziel ist es hierbei zu sehen, wie der Funktionsverlauf aussieht und wie man einfache Umformungen mit Hilfe dieser Funktionen durchführt.

4 Potenzen und Wurzeln

4.1 Potenzfunktionen

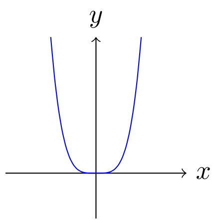
In Abschnitt 2 haben wir Polynomfunktionen angeschaut. Letztere sind einfach Summen und Vielfache von sogenannten Monomen. Wir präzisieren diesen Begriff zunächst.

Definition 4.1 *Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ eine reelle Zahl. Funktionen vom Typ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto a \cdot x^n$ heißen* ***Monome****. Ist $n = 0$, so definieren wir $x^0 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.*

Schauen wir uns an, wie die Graphen von Monomen im Allgemeinen aussehen:

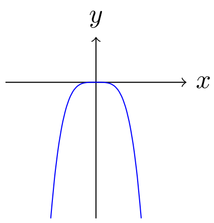
Beispiel 4.2

1. *Betrachten wir die Funktion $f(x) = ax^n$ mit $a > 0$ und $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gerade. Der Funktionsgraph sieht folgendermaßen aus:*



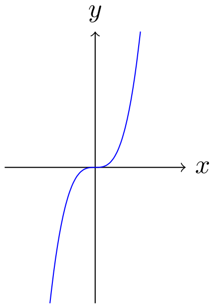
   Wir erkennen, dass die Funktion nach oben geöffnet ist und zudem achsensymmetrisch zur y-Achse ist. Ihr Aussehen gleicht dem einer Parabel. Die Funktionswerte liegen alle oberhalb der x-Achse.

2. *Betrachten wir die Funktion $f(x) = ax^n$ mit $a < 0$ und $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gerade. Der Funktionsgraph sieht folgendermaßen aus:*



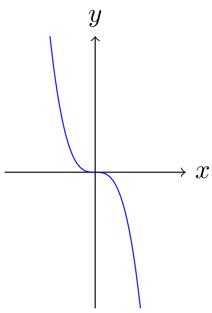
   Wir erkennen, dass die Funktion nach unten geöffnet ist und zudem achsensymmetrisch zur y-Achse ist. Ihr Aussehen gleicht dem einer an der x-Achse gespiegelten Parabel. Die Funktionswerte liegen alle unterhalb der x-Achse.

3. *Betrachten wir die Funktion $f(x) = ax^n$ mit $a > 0$ und $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ungerade. Der Funktionsgraph sieht folgendermaßen aus:*



Wir erkennen, dass die Funktion wie eine S-Kurve aussieht und punktsymmetrisch zum Punkt $(0,0)$ ist. Die Funktionswerte liegen für $x < 0$ unterhalb der x-Achse und für $x \geq 0$ oberhalb der x-Achse.

4. *Betrachten wir die Funktion $f(x) = ax^n$ mit $a < 0$ und $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ungerade. Der Funktionsgraph sieht folgendermaßen aus:*



Wir erkennen, dass die Funktion wie eine S-Kurve aussieht und punktsymmetrisch zum Punkt $(0,0)$ ist. Die Funktionswerte liegen für $x < 0$ oberhalb der x-Achse und für $x \geq 0$ unterhalb der x-Achse.

In Beispiel 4.2 sehen wir, dass die Gestalt von Monomen vom Vorzeichen des Vorfaktors abhängt und davon, ob der Exponent eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Was passiert nun aber, wenn wir negative Exponenten zulassen? In diesem Fall definieren wir zunächst folgendes:

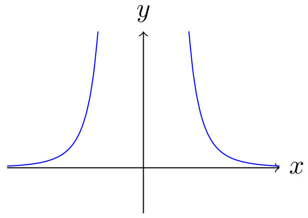
Definition 4.3 *Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Wir definieren für beliebige $x \neq 0$:*

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

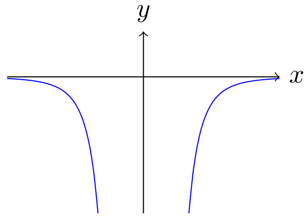
Als Nächstes schauen wir uns an, wie die Graphen von Potenzfunktionen aussehen, wenn die Exponenten negativ sind:

Beispiel 4.4

1. *Betrachten wir die Funktion $f(x) = \frac{a}{x^n}$ mit $a > 0$ und $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gerade. Der Funktionsgraph sieht folgendermaßen aus:*
   Wir erkennen, dass die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse ist und sich dieser für kleiner werdende x-Werte annähert. Die Funktionswerte liegen alle oberhalb der x-Achse.

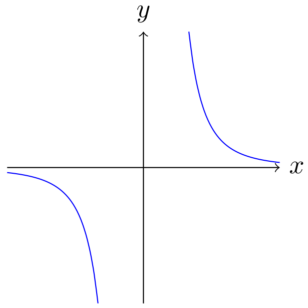


2. *Betrachten wir die Funktion* $f(x) = \frac{a}{x^n}$ *mit* $a < 0$ *und* $n \in \mathbb{N}_{>0}$ *gerade. Der Funktionsgraph sieht folgendermaßen aus:*



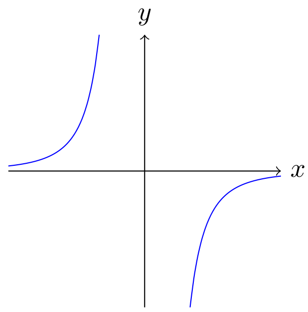
   Wir erkennen, dass die Funktion achsensymmetrisch zur y*-Achse ist und sich dieser für kleiner werdende* x*-Werte annähert. Die Funktionswerte liegen alle unterhalb der* x*-Achse.*

3. *Betrachten wir die Funktion* $f(x) = \frac{a}{x^n}$ *mit* $a > 0$ *und* $n \in \mathbb{N}_{>0}$ *ungerade. Der Funktionsgraph sieht folgendermaßen aus:*



   Wir erkennen, dass die Funktion punktsymmetrisch zum Punkt $(0, 0)$ *ist und sich der* y*-Achse für kleiner werdende* x*-Werte annähert. Die Funktionswerte liegen für* $x < 0$ *unterhalb der* x*-Achse und für* $x > 0$ *oberhalb der* x*-Achse.*

4. *Betrachten wir die Funktion $f(x) = \frac{a}{x^n}$ mit $a < 0$ und $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ungerade. Der Funktionsgraph sieht folgendermaßen aus:*



Wir erkennen, dass die Funktion punktsymmetrisch zum Punkt $(0,0)$ ist und sich der y-Achse für kleiner werdende x-Werte annähert. Die Funktionswerte liegen für $x < 0$ oberhalb der x-Achse und für $x > 0$ unterhalb der x-Achse.

Wir sehen in Beispiel 4.4, dass die Gestalt von Kehrwerten von Monomen wieder nur vom Vorzeichen des Vorfaktors abhängt und davon, ob der Exponent eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Wir geben Funktionen einen Namen.

Definition 4.5 *Sei $m \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl und $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Funktionen vom Typ $\mathbb{R} \backslash N \to \mathbb{R}, x \mapsto ax^m$ heißen* ***Potenzfunktionen****. Dabei ist $N = \{0\}$, wenn $m < 0$ und $N = \emptyset$, wenn $m \geq 0$.*

Nachdem wir jetzt Potenzfunktionen eingeführt haben, wollen wir kurz die Rechenregeln für diese vorstellen:

Formel 4.6 (Potenzgesetze) *Sei $a, b \in \mathbb{R}$ und $n, m \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$,
2. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$,
3. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ *und*
4. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, *falls* $a \neq 0$.

4.2 n-te Wurzeln

Zur Funktion $f(x) = x^2$ gehört, wie in Abschnitt 1 bereits angesprochen, die Funktion $g(x) = \sqrt{x}$. Wir haben dort gesehen, dass wir zwischen dem Berechnen der Wurzel einer gegebenen Zahl und der entsprechenden Umformung in einer Gleichung unterscheiden müssen. In diesem Abschnitt verallgemeinern wir zunächst den Begriff der Wurzel und besprechen im Anschluss den Umgang damit in Gleichungen.
Die uns bereits bekannte Wurzel, die sogenannte **Quadratwurzel**, wurde eingeführt um Probleme von folgendem Typ zu lösen:

> Finde alle $x \in \mathbb{R}$, die $x^2 = 5$ erfüllen.

In diesem Fall haben wir einfach die positive Lösung der Gleichung mit $\sqrt{5}$ bezeichnet und dadurch die Wurzelfunktion definiert. Genau dieselbe Idee werden wir jetzt verwenden um allgemeine Wurzeln zu definieren.

Definition 4.7 *Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und $a \in \mathbb{R}$. Wir unterscheiden zwei Fälle:*

1. *Ist n eine gerade Zahl und $a > 0$, so bezeichnet $\sqrt[n]{x}$ die positive Lösung der Gleichung $x^n = a$.*
2. *Ist n ungerade, so bezeichnet $\sqrt[n]{x}$ die reelle Lösung der Gleichung $x^n = a$.*

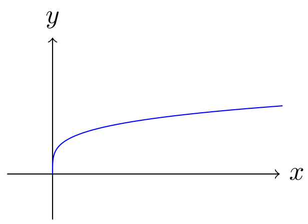
*Wir nennen $\sqrt[n]{x}$ die n-**te Wurzel** von x. Anstatt $\sqrt[n]{x}$ schreibt wir auch $x^{\frac{1}{n}}$.*

Hinweis 4.8 *Ist n eine gerade Zahl, so können wir nur die n-te Wurzel von positiven reellen Zahlen bestimmen. Ist n jedoch ungerade, so können wir die n-te Wurzel von beliebigen reellen Zahlen bestimmen. Die Notation $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, kommt daher, dass wir die Potenzgesetze auch auf n-te Wurzeln erweitern können. Wir werden dies im Verlauf des Abschnitts im Detail betrachten.*

Schauen wir uns die Graphen der Wurzelfunktionen an.

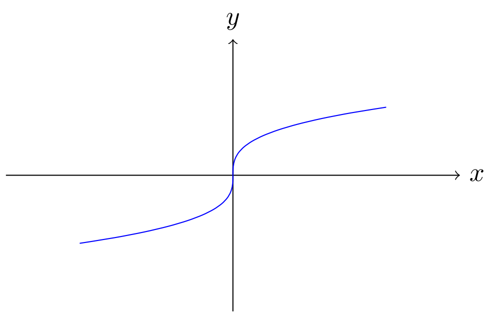
Beispiel 4.9

1. *Betrachten wir die Funktion $f(x) = \sqrt[n]{x}$ mit geradem $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Der Funktionsgraph sieht folgendermaßen aus:*



   Wir erkennen, dass die Funktion keine Symmetrie aufweist. Die Funktionswerte liegen alle oberhalb der x-Achse.

2. *Betrachten wir die Funktion $f(x) = \sqrt[n]{x}$ mit ungeradem $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Der Funktionsgraph sieht folgendermaßen aus:*



   Wir erkennen, dass die Funktion punktsymmetrisch zum Punkt $(0, 0)$ ist. Die Funktionswerte liegen unterhalb der x-Achse, falls $x < 0$, und oberhalb der x-Achse, falls $x \geq 0$.

Nachdem wir nun n-te Wurzeln eingeführt haben, betrachten wir den Umgang mit Gleichungen und der Verwendung von n-ten Wurzeln bei Umformungen. Hierzu erweitern wir die Potenzgesetze in Formel 4.6 um folgendes:

Formel 4.10 (Wurzelgesetze) *Seien $n, m \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen und $a \in \mathbb{R}$. Es gilt:*

1. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$, *wobei $a > 0$ gelten muss, falls $n \neq 0$ eine gerade Zahl ist.*
2. *Ist $n \neq 0$ gerade und $a > 0$, so gilt*

   $$\sqrt[n]{x^n} = a \text{ genau dann, wenn } |x| = \sqrt[n]{a}.$$

3. *Ist n ungerade, so gilt*

   $$\sqrt[n]{x^n} = a \text{ genau dann, wenn } x = \sqrt[n]{a}.$$

Schauen wir uns zwei Beispiele zur Anwendung der Wurzelgesetze an:

Beispiel 4.11 *Wir betrachten die Gleichung*

$$x^6 = 16x^2.$$

Umstellen und Ausklammern von x^2 ergibt

$$x^2 \cdot (x^4 - 16) = 0.$$

Die erste Lösung, die wir ablesen können ist $x_1 = 0$. Aus diesem Grund betrachten wir nur noch die Gleichung $x^4 - 16 = 0$, welche äquivalent zu

$$x^4 = 16$$

ist. Nach Formel 4.10 gilt

$$|x| = \sqrt[4]{16} = 2,$$

womit wir die zusätzlichen Lösungen

$$x_{2,3} = \pm 2$$

erhalten.

Beispiel 4.12 *Wir betrachten die Gleichung*

$$\sqrt[27]{x^3} = -2.$$

Zunächst können wir den Ausdruck vereinfachen, indem wir ihn etwas umschreiben. Es gilt:

$$\sqrt[27]{x^3} = x^{\frac{3}{27}} = x^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{x}.$$

Nun können wir beide Seiten mit 9 potenzieren und erhalten:

$$\left(x^{\frac{1}{9}}\right)^9 = x^{\frac{9}{9}} = x = (-2)^9 = -512.$$

Damit ist $x_1 = -512$ die einzige Lösung, da Potenzieren mit ungeradem Exponenten und das Ziehen von ungeraden Wurzeln keine Mehrfachlösungen erzeugen.

4.3 Aufgaben

Aufgabe 4.1 *Skizziere die Graphen folgender Funktionen:*

1. $f(x) = 5(x-3)^3 + 3$
2. $f(x) = (x+2)^4 - 1$
3. $f(x) = (x-1)^{-1} + 2$
4. $f(x) = -(x-2)^{-4} + 1$

Wir wirken sich die Parameter a, b und c auf den Graphen der Funktion $f(x) = a \cdot (x-b)^n + c$ für festes $n \in \mathbb{Z}$ aus?

Aufgabe 4.2 *Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungen:*

1. $\sqrt[8]{x} + 264 = 0$
2. $\sqrt[9]{x} - 1024 = -512$
3. $\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[6]{x} - 2 = 0$
4. $4\sqrt{x} + 5\sqrt[4]{x} - 16 = 0$

5 Exponentialfunktionen und Logarithmen

5.1 Exponentialfunktionen

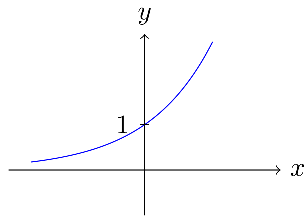
Eine wichtiger Typ von Funktionen sind die sogenannten Exponentialfunktionen. Diese tauchen in den Naturwissenschaften an fast jeder Stelle auf, da mit ihnen zum Beispiel Wachstumsprozesse oder Dämpfungen modelliert werden können. Bevor wir uns die Eigenschaften dieser Funktionen ansehen, müssen wir sie zunächst definieren.

Definition 5.1 *Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $a \neq 1$. Funktionen vom Typ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto a^x$ heißen* ***Exponentialfunktionen****.*

Schauen wir uns die möglichen Graphen von Exponentialfunktionen an:

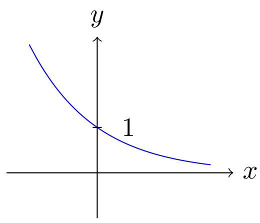
Beispiel 5.2

1. *Wir betrachten die Funktion $f(x) = a^x$ mit $a > 1$. Der Funktionsgraph sieht folgendermaßen aus:*



   Wir erkennen, dass die Funktion keine Symmetrie aufweist. Die Funktionswerte liegen alle oberhalb der x-Achse und nehmen mit größer werdendem x-Wert zu.

2. *Wir betrachten die Funktion $f(x) = a^x$ mit $a < 1$. Der Funktionsgraph sieht folgendermaßen aus:*



   Wir erkennen, dass die Funktion keine Symmetrie aufweist. Die Funktionswerte liegen alle oberhalb der x-Achse und nehmen mit größer werdendem x-Wert ab.

Exponentialfunktionen verallgemeinern im wesentlichen die Potenzfunktionen, sodass dieselben Rechenregeln gelten. Wir müssen nur aufpassen, dass der Unterschied darin besteht, dass unsere Funktionsvariable x im Exponenten steht.

Formel 5.3 (Potenzgesetze II) *Sei* $a, b \in \mathbb{R}_{>}0$ *mit* $a, b \neq 1$ *und* $x, y \in \mathbb{R}$. *Dann gilt:*

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$,
2. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$,
3. $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$ *und*
4. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

Als nächstes könnten wir diese Funktionsvorschriften etwas abändern und untersuchen, wie sich Parameter auf den Funktionsgraphen auswirken. Dies überlassen wir jedoch dem Leser, siehe Aufgabe 5.1.

5.2 Logarithmen

In Abschnitt 4 haben wir n-te Wurzeln eingeführt, um Gleichung vom Typ $x^n = a$ zu lösen. In diesem Unterabschnitt betrachten wir Gleichungen vom Typ

$$a^x = b,$$

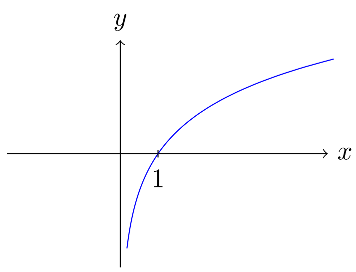
wobei $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$. Hierbei ist die Variable, nach der wir auflösen wollen, im Exponenten, sodass uns Wurzeln nicht helfen werden. Die Lösung sind sogenannte Logarithmen:

Definition 5.4 *Seien* $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ *mit* $a \neq 1$. *Wir bezeichnen mit* $x = \log_a(b)$ *die (eindeutige) Lösung der Gleichung* $a^x = b$. *Wir nennen* $\log_a(b)$ *den* ***Logarithmus von*** b ***zur Basis*** a. *Funktionen vom Typ* $\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, x \mapsto \log_a(x)$ *für festes* a *heißen* ***Logarithmusfunktionen*** *bzw.* ***Logarithmen****.*

Schauen wir uns die möglichen Graphen von Logarithmen an:

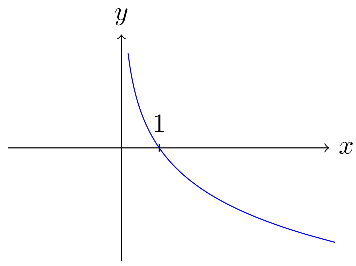
Beispiel 5.5

1. *Wir betrachten die Funktion* $f(x) = \log_a(x)$ *mit* $a > 1$. *Der Funktionsgraph sieht folgendermaßen aus:*



Wir erkennen, dass die Funktion keine Symmetrie aufweist. Die Funktionswerte liegen alle unterhalb der x*-Achse, falls* $x < 1$ *und oberhalb, falls* $x \geq 1$. *Die Funktionswerte nehmen mit größer werdendem* x*-Wert zu.*

2. *Wir betrachten die Funktion $f(x) = \log_a(x)$ mit $a < 1$. Der Funktionsgraph sieht folgendermaßen aus:*



Die Funktionswerte liegen alle oberhalb der x-Achse, falls $x < 1$ und unterhalb, falls $x \geq 1$. Die Funktionswerte nehmen mit größer werdendem x-Wert ab.

Nachdem wir uns den Graphen von Logarithmen angeschaut haben, wollen wir uns jetzt den Umgang mit ihnen in Gleichungen anschauen. Hierzu verwenden wir die folgenden Formeln:

Formel 5.6 (Logarithmusgesetze) *Sei $a, x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $a \neq 1$ und $b \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

1. $\log_a(a) = 1$,
2. $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$,
3. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$ *und*
4. $\log_a(x^b) = b \cdot \log_a(x)$.

Schauen wir uns ein Beispiel an, indem wir eine Gleichung mit Hilfe von Logarithmen lösen:

Beispiel 5.7 *Wir betrachten die Gleichung*

$$2^{x^2+2x+6} = 32.$$

Wir Logarithmieren auf beiden Seiten und erhalten:

$$\log_2\left(2^{x^2+2x+6}\right) = \log_2(32).$$

Anwenden des ersten und vierten Logarithmusgesetzes ergibt dann:

$$(x^2 + 2x + 6) \cdot \log_2(2) = x^2 + 2x + 6 = \log_2(32) = \log_2(2^5) = 5.$$

Somit müssen wir nur noch die Gleichung $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 = 0$ lösen, welche nur die Lösung $x = -1$ hat.

In Beispiel 5.7 sind die Zahlen so schön gewählt gewesen, dass wir keinen Taschenrechner gebraucht haben, um den Logarithmus auszurechnen. Im Allgemeinen wird dies jedoch nicht der Fall sein und der Taschenrechner hat in der Regel nur eine oder zwei Tasten für den Logarithmus mit festen Werten für a. Was machen wir, wenn wir nicht gerade einen dieser festen Werte betrachten? Schauen wir uns dazu ein Beispiel an:

Beispiel 5.8 *Wir betrachten die Gleichung*

$$10^x = 5.$$

Wir können einfach $\log_{10}$ *auf beiden Seiten anwenden und erhalten*

$$x = \log_{10}(5).$$

Hat der Taschenrechner diesen Logarithmus gespeichert, so sind wir fertig. Nur was, wenn der Taschenrechner $\log_2$ *gespeichert hat? Wir wenden dann einfach* $\log_2$ *auf beiden Seiten an und erhalten:*

$$x = \frac{\log_2(5)}{\log_2(10)}.$$

Damit können wir das Ergebnis ausrechnen. Weiterhin können wir folgende Beziehung erkennen:

$$\log_{10}(5) = \frac{\log_2(5)}{\log_2(10)}$$

Das Vorgehen aus Beispiel 5.8 erlaubt es uns jeden Logarithmus zu jeder beliebigen Basis auszurechnen, solange wir in der Lage sind einen Logarithmus zu einer festen vorgegebenen Basis auszurechnen. Es gilt dabei die folgende Formel:

Formel 5.9 *Seien* $a, b, c \in \mathbb{R}_{>0}$ *mit* $a, b \neq 1$. *Dann gilt:*

$$\log_a(c) = \frac{\log_b(c)}{\log_b(a)}.$$

5.3 Aufgaben

Aufgabe 5.1 *Skizziere folgende Graphen:*

1. $f(x) = 3 \cdot 2^{x-3} + 2$
2. $f(x) = -2 \cdot 3^{x+1} - 1$
3. $f(x) = 2^{x-2} + 1$
4. $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} - 2$

Wir wirken sich die Parameter b, c *und* d *auf den Graphen der Funktion* $f(x) = b \cdot a^{x-c} + d$ *für festes* $a \in \mathbb{R}$ *aus?*

Aufgabe 5.2 *Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungen:*

1. $5^{x^2+x} = 125$
2. $18 \cdot 2^{7x-1} = 2 \cdot 5^{2x-1}$
3. $2^{4x-3} \cdot 4^{2x+1} = 8^x$
4. $3^{3x+1} \cdot 9^{1-2x} = 27^x$

6 Winkelfunktionen

6.1 Sinus, Cosinus und Tangens

Winkelfunktionen spielen, genauso wie Exponentialfuktionen, eine wichtige Rolle in den Naturwissenschaften, da mit ihnen zum Beispiel jegliche Form einer Schwingung modelliert werden kann. In diesem Abschnitt wollen wir die drei wichtigsten Winkelfunktionen einführen. In diesem Abschnitt werden wir Winkel im **Bogenmaß** angeben. Das heißt, dass ein Winkel von 360° einem Winkel von 2π im Bogenmaß entspricht. Die Umrechnungsformel, um einen Winkel α aus dem Gradmaß in das Bogenmaß umzurechnen, lautet:

$$b = \alpha \cdot \frac{2\pi}{360°},$$

wobei b dem Wert im Bogenmaß entspricht. Sinus, Cosinus und Tangens lassen sich auf elementare Art und Weise am **Einheitskreis** definieren.

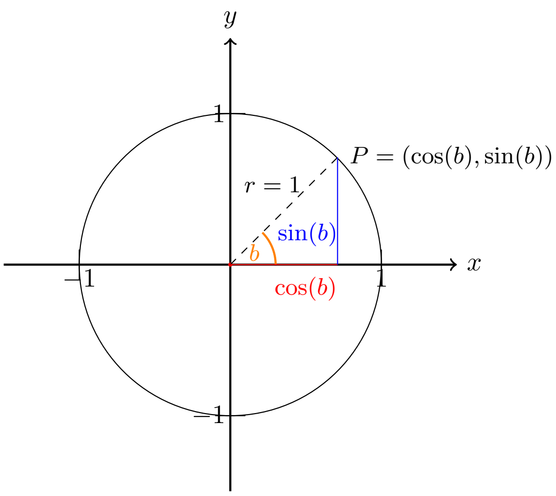


Abbildung 5: Skizze zu Definition 6.1.

Wir verwenden Abbildung 6.1, um Sinus, Cosinus und Tangens zu definieren.

Definition 6.1 *Sei $b \in [0, 2\pi)$. Bezeichne mit g die Gerade, die durch den Punkt $(0, 0)$ verläuft und den Winkel b mit der x-Achse einschließt. $P = (x, y)$ bezeichne den Schnittpunkt von g mit dem Einheitskreis. Dann definieren wir den* ***Sinus*** *als $\sin(b) = y$ und den* ***Cosinus*** *als $\cos(b) = x$. Weiterhin definieren wir den* ***Tangens*** *als $\tan(b) = \frac{\sin(b)}{\cos(b)}$, falls $\cos(b) \neq 0$.*

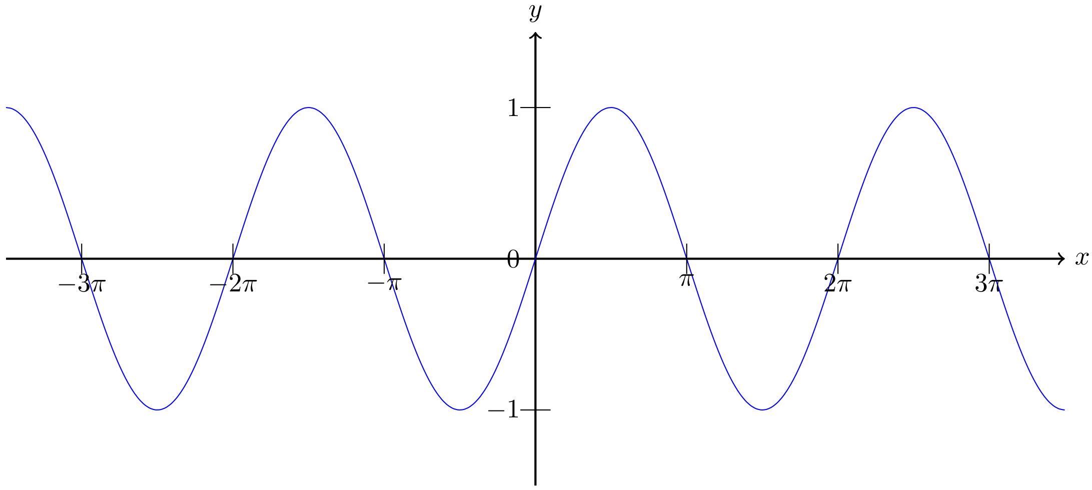
Jede reelle Zahl x kann geschrieben werden als $x = b + k \cdot 2\pi$, wobei $b \in [0, 2\pi)$ und $k \in \mathbb{Z}$. Dies erlaubt es uns die Sinus-, Cosinus- und Tangensfunktion zu definieren.

Definition 6.2 *Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x = b + k \cdot 2\pi$, wobei $b \in [0, 2\pi)$ und $k \in \mathbb{Z}$. Dann definieren wir $\sin(x) = \sin(b), \cos(x) = \cos(b)$ und $\tan(x) = \tan(b)$, sofern $\tan(b)$ definiert ist. Die Funktionen $\sin(x), \cos(x)$ bzw. $\tan(x)$ heißen* ***Sinusfunktion, Cosinusfunktion*** *bzw.* ***Tangensfunktion****.*

Schauen wir uns die Funktionsgraphen an

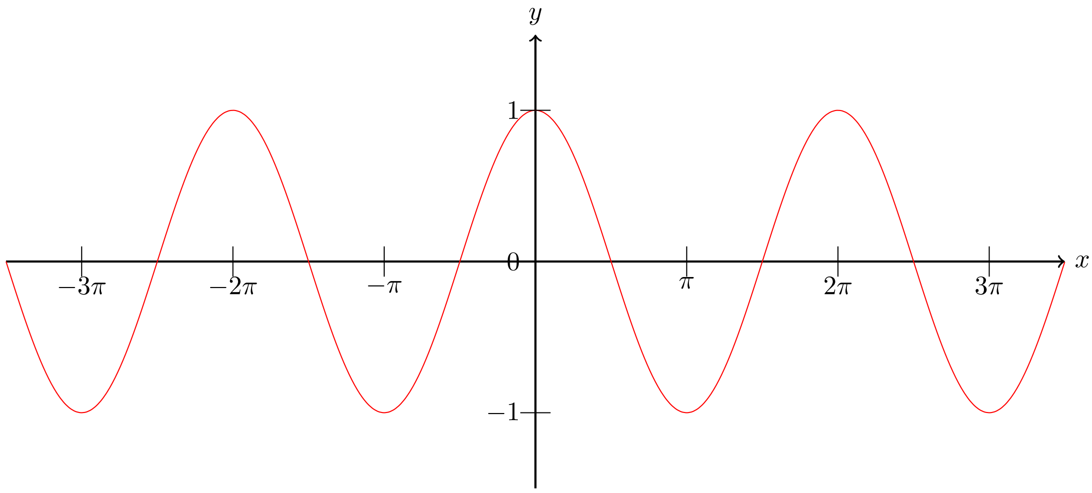
Beispiel 6.3

1. *Wir zeichnen den Graphen von* $f(x) = \sin(x)$.



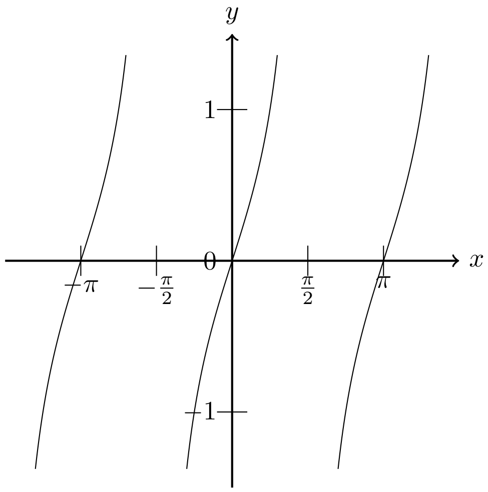
Wir erkennen, dass der Sinus 2π*-periodisch ist, puntsymmetrisch zum Punkt* $(0,0)$ *ist und sein Betrag maximal den Wert* 1 *annimmt.*

2. *Wir zeichnen den Graphen von* $f(x) = \cos(x)$.



Wir erkennen, dass der Cosinus 2π*-periodisch ist, achsensymmetrisch zur* y*-Achse ist und sein Betrag maximal den Wert* 1 *annimmt.*

3. *Wir zeichnen den Graphen von $f(x) = \tan(x)$.*



Wir erkennen, dass der Tangens π-periodisch ist, punktsymmetrisch zum Punkt $(0,0)$ ist und er jeden reellen Wert annimmt. Weiterhin hat der Tangens an den Stellen $x_k = (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$ Polstellen

Zunächst ist es wichtig, bestimmte Werte von Sinus und Cosinus auswendig zu können. Dadurch, dass beide Funktionen 2π-periodisch sind, genügt es sich die Werte im Intervall $[0, 2\pi]$ zu merken. Es gilt:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin(x)$	0	1	0	-1	0
$\cos(x)$	1	0	-1	0	1

Zum Ende dieses Unterabschnitts wollen wir uns noch eine Formel ansehen, die oftmals sehr nützlich ist, wenn man mit Sinus und Cosinus arbeitet.

Formel 6.4 *Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

$$(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1.$$

Beweis: Wir betrachten Abbildung 6.1. Wir erkennen dort, dass Sinus und Cosinus über ein Rechtwinkliges Dreieck definiert sind, bei dem sie die Länge Gegenkathete bzw. die Länge der Ankathete angeben. Die Länge der Hypothenuse beträgt 1. Nach dem Satz von Pythagoras folgt sofort:

$$(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1.$$

□

6.2 Arcusfunktionen

In diesem Unterabschnitt wollen wir, ähnlich zu den Abschnitten 4 und 5, Gleichungen betrachten, die Sinus, Cosinus und Tangens involvieren. Auf Grund der Tatsache, dass Sinus und Cosinus nur Werte im Intervall $[-1,1]$ annehmen können, der Tangens jedoch Werte in ganz $\mathbb{R}$ annehmen kann, trennen wir diese zwei Fälle. Wir beginnen mit Sinus und Cosinus. Der Typ Gleichung den wir Lösen wollen ist

$$\sin(x) = a \text{ bzw. } \cos(x) = a$$

für ein gegebenes $a \in [-1,1]$. Auf Grund der 2π-Periodizität der Sinus- und der Cosinusfunktion haben wir unendlich viele Lösungen. Deswegen müssen wir unsere Betrachtung (zunächst) einschränken. Beim Sinus erkennen wir in Abbildung 1, dass im Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ alle Werte zwischen -1 und 1 angenommen werden. Beim Cosinus zeigt uns Abbildung 2, dass im Intervall $[0,\pi]$ alle Werte zwischen -1 und 1 angenommen werden. Dies führt zu den folgenden Definitionen.

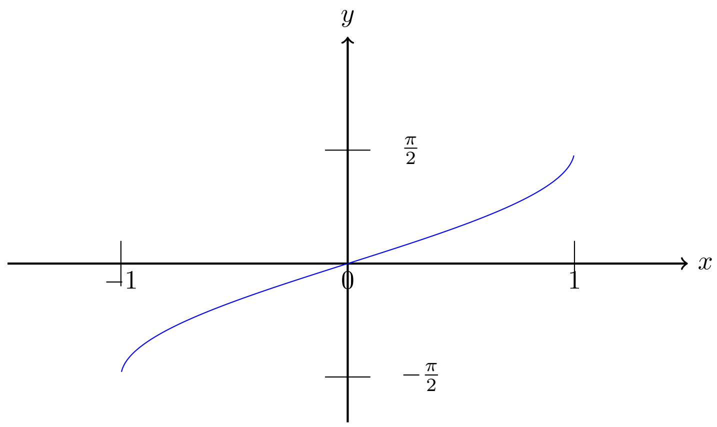
Definition 6.5 *Sei* $a \in [-1,1]$.

1. *Wir bezeichnen mit* $\arcsin(a)$ *die eindeutige Lösung von* $\sin(x) = a$ *im Intervall* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. *Wir nennen die Funktion* $f : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], x \mapsto \arcsin(x)$ *den* ***Arcussinus***.
2. *Wir bezeichnen mit* $\arccos(a)$ *die eindeutige Lösung von* $\cos(x) = a$ *im Intervall* $[0,\pi]$. *Wir nennen die Funktion* $f : [-1,1] \to [0,\pi], x \mapsto \arccos(x)$ *den* ***Arcuscosinus***.

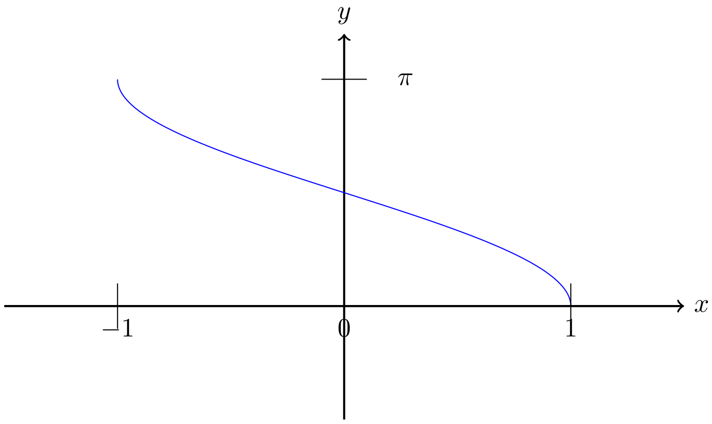
Bevor wir uns ein Beispiel zum Bestimmen von Lösungen von Gleichungen mit den Arcusfunktionen anschauen, schauen wir uns zunächst ihre Graphen an.

Beispiel 6.6

1. *Sei* $f(x) = \arcsin(x)$. *Der Graph sieht folgendermaßen aus:*



2. *Sei* $f(x) = \arccos(x)$. *Der Graph sieht folgendermaßen aus:*



Als nächstes widmen wir uns dem Lösen von Gleichungen, die Sinus und Cosinus involvieren. Schauen wir uns dazu ein Beispiel an:

Beispiel 6.7 *Wir betrachten die Gleichung*

$$\sin(x^2 + x) = 1.$$

Zunächst wenden wir den Arcussinus auf beide Seiten an. Es ergibt sich:

$$x^2 + x = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Als Lösungen von $x^2 + x - \frac{\pi}{2} = 0$ *ergeben sich mit der p-q Formel*

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1 + 2\pi}}{2}$$

als Lösungen. Das sind aber nicht alle möglichen Lösungen. Durch den Arcussinus vergessen wir die 2π*-Periodizität, sodass unsere Gleichung folgendermaßen aussehen muss:*

$$x^2 + x - \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi = 0,$$

wobei $k \in \mathbb{Z}$. *Wieder wenden wir die p-q Formel an und erhalten*

$$x_{k,1} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1 + 2\pi - k \cdot 8\pi}}{2} \quad \textit{bzw.} \quad x_{k,2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1 + 2\pi - k \cdot 8\pi}}{2}$$

Wir erkennen, dass für $k \geq 1$ *gilt:*

$$1 + 2\pi - k \cdot 8\pi \leq 1 + 2\pi - 8\pi = 1 - 6\pi < 0.$$

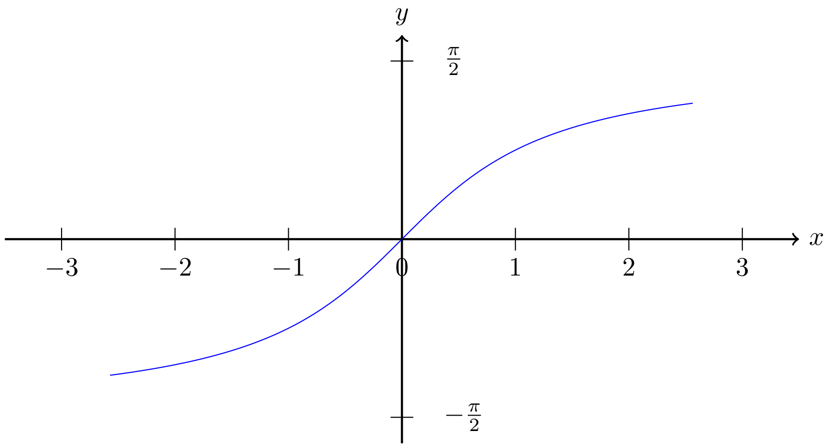
Da der Ausdruck unter der Wurzel nicht negativ werden darf, gelten unsere Lösungen nur für $k \in \mathbb{Z}$ *mit* $k \leq 0$.

Beispiel 6.7 zeigt uns, das wir sehr vorsichtig im Umgang mit der Periodizität beim Lösen von Gleichungen sein müssen, die Sinus und Cosinus involvieren.
Zum Abschluss schauen wir uns jetzt noch die Umkehrung des Tangens an.

Definition 6.8 *Sei* $a \in \mathbb{R}$. *Wir bezeichnen mit* $\arctan(a)$ *die eindeutige Lösung von* $\tan(x) = a$ *im Intervall* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. *Wir nennen die Funktion* $f : \mathbb{R} \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], x \mapsto \arctan(x)$ *den* ***Arcustangens***.

Schauen wir uns den Graphen vom Arcustangens an:

Beispiel 6.9 *Sei $f(x) = \arctan(x)$. Der Graph sieht folgendermaßen aus:*



Hinweis 6.10 *Beim Umgang mit dem Arcustangens müssen wir beachten, dass wir eine π-periodische Funktion haben. Ansonsten funktionieren die Umformungen damit wie mit dem Arcussinus und dem Arcuscosinus.*

6.3 Aufgaben

Aufgabe 6.1 *Skizziere folgende Graphen:*

1. $f(x) = 2\sin(2\pi x) + 1$
2. $f(x) = \sin(\frac{1}{2}x) - 1$
3. $f(x) = 3\sin(\pi x) + 2$
4. $f(x) = -2\sin(4\pi x) + 2$

Wir wirken sich die Parameter a, b und c auf den Graphen der Funktion $f(x) = a\sin(bx) + d$ aus?

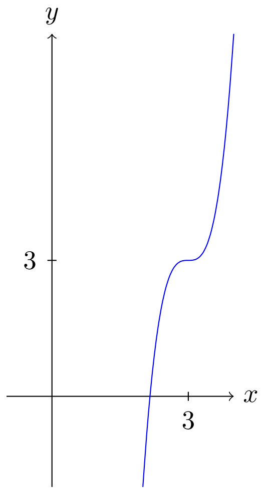
Aufgabe 6.2 *Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungen:*

1. $2\sin(x + 5) = 3$
2. $2\cos(x - 1) = 2$
3. $2\cos(\pi x) = 0$
4. $(\sin(2^x))^2 + 5\cos(x^2 + x + 1) + (\cos(2^x))^2 = -4$

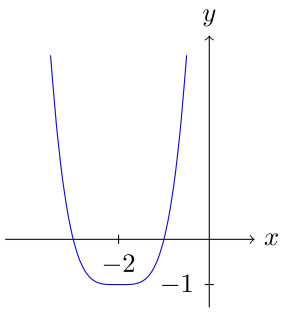
Lösungen zu den Aufgaben

Aufgabe 4.1

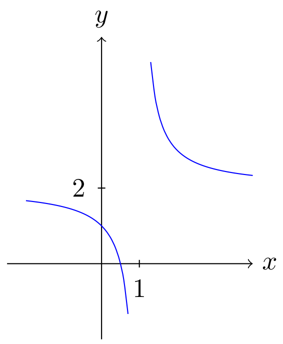
1. Der Funktionsgraph sieht folgendermaßen aus:



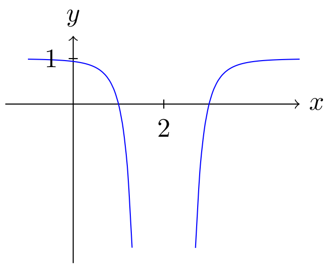
2. Der Funktionsgraph sieht folgendermaßen aus:



3. Der Funktionsgraph sieht folgendermaßen aus:



4. Der Funktionsgraph sieht folgendermaßen aus:



An den obigen Beispielen erkennen wir, dass der Parameter b die Verschiebung entlang der x-Achse bestimmt. Der Parameter c bestimmt die Verschiebung entlang der y-Achse. Ändert der Parameter a sein Vorzeichen, so wird der Graph der Funktion an der x-Achse gespiegelt.

Aufgabe 4.2

1. Wir können die Gleichung umstellen und erhalten:

   $$\sqrt[8]{x} = -256,$$

   womit die Gleichung keine Lösung besitzt, da $-256 < 0$.

2. Wir können die Gleichung umstellen und erhalten:

   $$\sqrt[9]{x} = 512,$$

   womit die Gleichung nur die Lösung $x = 2$ besitzt, da $2^9 = 512$.

3. Zunächst halten wir fest, dass

   $$\sqrt[6]{x}^2 = x^{\frac{2}{6}} = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$$

   gilt. Setzen wir $u = \sqrt[6]{x}$ so lässt sich die Gleichung schreiben als:

   $$u^2 + 2u - 2 = 0.$$

   Die Lösungen sind

   $$u_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+2} = -1 \pm \sqrt{3}.$$

   Da $u_2 = -1 - \sqrt{3} < 0$ lautet die einzige Lösung der ursprünglichen Gleichung:

   $$x = \left(-1 + \sqrt{3}\right)^6.$$

4. Wie eben können wir erkennen, dass $\sqrt[4]{x}^2 = \sqrt{x}$. Die Substitution $u = \sqrt[4]{x}$ führt die Gleichung auf die Gestalt:

   $$4u^2 + 5u - 16 = 0.$$

Die Lösungen hierfür lauten

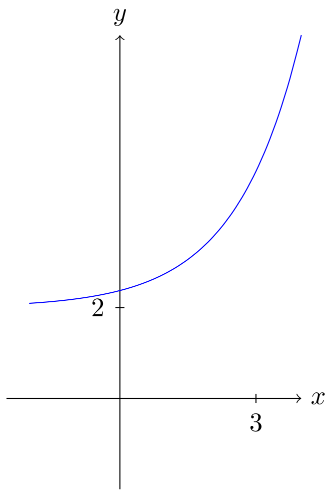
$$u_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{281}}{8}.$$

Da $u_2 = \frac{-5-\sqrt{281}}{8} < 0$ ist, benötigen wir nur die Lösungen von $\sqrt[4]{x} = \frac{-5+\sqrt{281}}{8}$. Diese ist

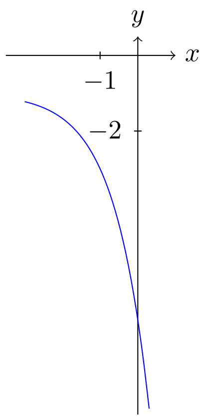
$$x = \left(\frac{-5 + \sqrt{281}}{8}\right)^4.$$

Aufgabe 5.1

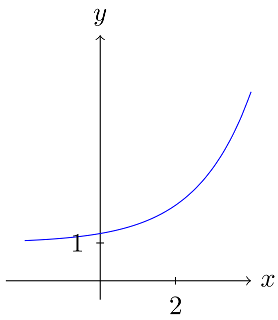
1. Der Funktionsgraph sieht folgendermaßen aus:



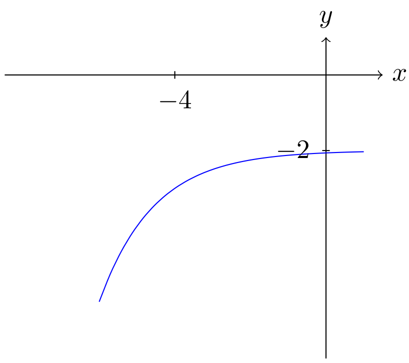
2. Der Funktionsgraph sieht folgendermaßen aus:



3. Der Funktionsgraph sieht folgendermaßen aus:



4. Der Funktionsgraph sieht folgendermaßen aus:



An den obigen Beispielen erkennen wir, dass der Parameter c die Verschiebung entlang der x-Achse bestimmt. Der Parameter d bestimmt die Verschiebung entlang der y-Achse. Ändert der Parameter b sein Vorzeichen, so wird der Graph der Funktion an der x-Achse gespiegelt.

Aufgabe 5.2

1. Logarithmieren auf beiden Seiten ergibt:

   $$x^2 + x = \log_5(125) = 3\log_5(5) = 3.$$

   Somit sind die gesuchten Lösungen

   $$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

2. Wenn wir auf beiden Seiten durch 2 teilen ergibt sich:

   $$9 \cdot 2^{7x-1} = 5^{2x-1}.$$

   Wir logarithmieren mit $\log_2$ und erhalten:

   $$\log_2(9) + 7x - 1 = (2x-1) \cdot \log_2(5).$$

Auflösen nach x ergibt:

$$x = \frac{1 - \log_2(5) - \log_2(9)}{7 - 2\log_2(5)}.$$

3. Wir schreiben die Gleichung zunächst so, dass überall 2 die Basis ist. Es ergibt sich:

$$2^{4x-3} \cdot 2^{4x+2} = 2^{3x}.$$

Nun gilt $2^{4x-3} \cdot 2^{4x+2} = 2^{8x-1}$. Logarithmieren und umstellen ergibt:

$$x = \frac{1}{5}.$$

4. Wir schreiben die Gleichung zunächst so, dass überall 3 die Basis ist. Es ergibt sich:

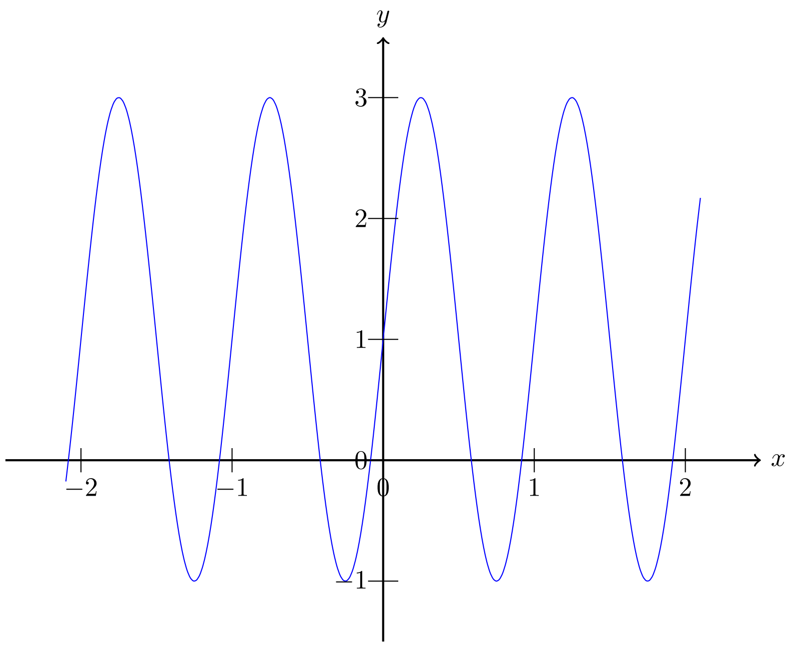
$$3^{3x+1} \cdot 3^{2-4x} = 3^{3x}.$$

Nun gilt $3^{3x+1} \cdot 3^{2-4x} = 3^{3-x}$. Logarithmieren und umstellen ergibt:

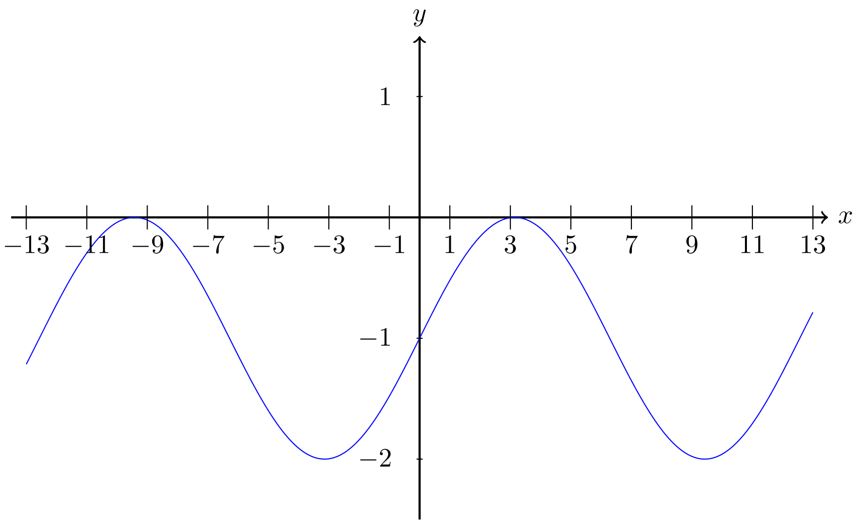
$$x = \frac{3}{4}.$$

Aufgabe 6.1

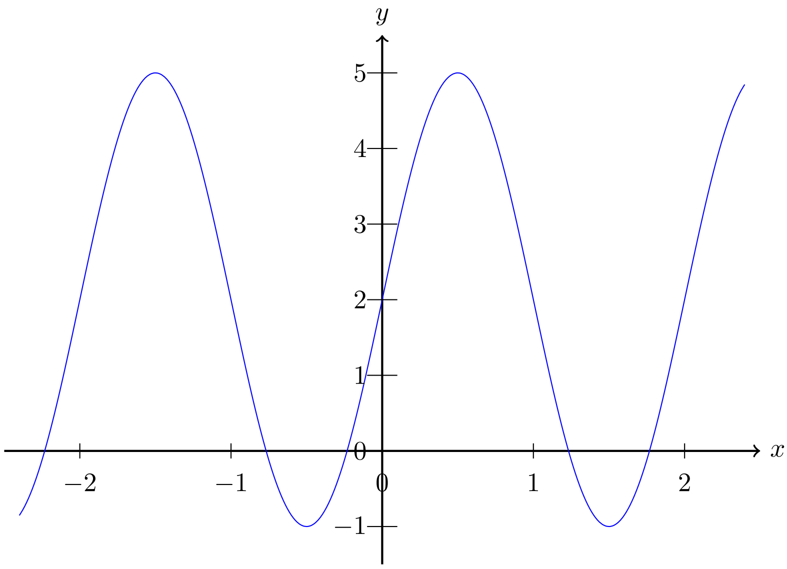
1. Der Funktionsgraph sieht folgendermaßen aus:



2. Der Funktionsgraph sieht folgendermaßen aus:

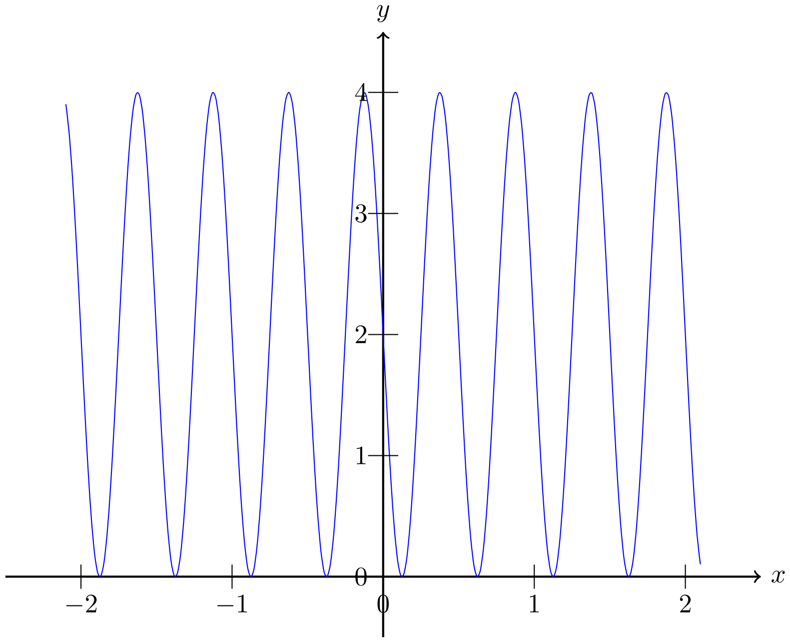


3. Der Funktionsgraph sieht folgendermaßen aus:



4. Der Funktionsgraph sieht folgendermaßen aus:

An den obigen Beispielen erkennen wir, dass der Parameter a den maximalen Sinuswert auf a setzt. Der Parameter d verschiebt die Sinusfunktion entlang der y-Achse. Der Parameter b verändert die Periode. Ist $b > 1$, so wird die Periodenlänge kleiner, ist $b < 1$ so wird die Periodenlänge größer.



Aufgabe 6.2

1. Wir wissen,dass $|\sin(x)| \leq 1$ gilt, womit $|2\sin(x)| \leq 2$ gelten muss. Damit hat die Gleichung keine Lösung, da $2 < 3$.

2. Division mit 2 ergibt die Gleichung $\cos(x-1) = 1$. Anwendung des Arcuscosinus auf beiden Seiten ergibt dann:

   $$x - 1 = 0,$$

   womit $x = 1$ eine Lösung ist. Da der Wert 1 in jeder 2π-Periode nur einmal angenommen wird, erhalten wir, dass alle Lösungen von der Gestalt

   $$x_k = 1 + k \cdot 2\pi$$

   sind, wobei $k \in \mathbb{Z}$.

3. Die Gleichung ist äquivalent zur Gleichung $\cos(\pi x) = 0$. Anwendung des Arcuscosinus ergibt

   $$\pi x = \frac{\pi}{2},$$

   womit $x = \frac{1}{2}$ eine Lösung ist. Da $\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$ gilt, ergeben sich alle Lösungen zu:

   $$x_k = \frac{1}{2} + 2k \text{ und } x_l = \frac{3}{2} + 2l,$$

   wobei $k, l \in \mathbb{Z}$.

4. Wir nutzen zunächst aus, dass $(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$ gilt. Damit vereinfacht sich die Gleichung zu:

   $$5\cos\left(x^2 + x + 1\right) = -5.$$

Umstellen und anwenden des Arcuscosinus ergibt

$$x^2 + x + 1 = \pi.$$

Auflösen nach x ergäbe nun maximal zwei mögliche Lösungen. Wir müssen jedoch beachten, dass Lösungen von $x^2 + x + 1 + k \cdot 2\pi = \pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ die Gleichung ebenfalls lösen. Umstellen und anwenden der a-b-c Formel ergibt:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - k \cdot 8\pi + 4\pi}}{2}.$$

Der Ausdruck unter der Wurzel ist negativ, falls $1 + 4\pi \leq k \cdot 8\pi$ gilt. Dies ist dann erfüllt, wenn $k \geq \frac{1}{8\pi} + \frac{1}{2}$ gilt. Da $k \in \mathbb{Z}$ muss dann $k \geq 1$ gelten. Damit erhalten wir für $k \leq 0$ die Lösungen:

$$x_{1,k} = \frac{-1 + \sqrt{1 - k \cdot 8\pi + 4\pi}}{2} \text{ und } x_{2,k} = \frac{-1 - \sqrt{1 - k \cdot 8\pi + 4\pi}}{2}.$$

Literatur

[BL01] Dieter Brandt and Theophil Lambacher. *Analysis - Leistungskurs Gesamtband*. Ernst Klett Verlag, 2001.

[GP97] Heinz Griesel and Helmut Postel. *Elemente der Mathematik - 10. Schuljahr*. Schroedel Verlag, 1997.

[Lam00] Theophil Lambacher. *Analytische Geometrie mit linearer Algebra - Leistungskurs*. Ernst Klett Verlag, 2000.