Raul Epure — Wintersemester 2018/2019

Grundlagen der Mathematik II

Behauptung 1. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\dim_{\mathbb{K}} V \geq 1$. Dann gibt es eine Metrik $d : V \times V \to \mathbb{R}$ auf V, welche* ***nicht*** *durch eine Norm induziert*[1] *wird.*

Beweis. Wir versehen V mit der **trivialen Metrik**, d.h.

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}.$$

Angenommen es gäbe eine Norm $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ mit $d(x,y) = \|x-y\|$. Dann gilt

$$d(x,0) = \|x\| = 1$$

für alle $0 \neq x \in V$. Jedoch gilt auch

$$\|2x\| = |2| \cdot \|x\| = 2 \neq 1 = d(2x, 0).$$

Somit induziert keine Norm die triviale Metrik.

Behauptung 2. *Sei*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \textit{falls } (x,y) \neq 0, \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}.$$

Dann gilt:

(a) Alle partiellen Ableitungen von f in $(0,0)$ existieren.

(b) f ist total differenzierbar in $(0,0)$.

Lösung.

(a) Es gilt

$$\partial_1 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \cdot 0^2}{h^2 + 0^2} = 0.$$

und analog

$$\partial_2 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{0^2 \cdot h^2}{0^2 + h^2} = 0.$$

Damit ist f partiell differenzierbar in $(0,0)$.

(b) Aus Teil (a) wissen wir, dass, wenn f in $(0,0)$ total differenzierbar wäre, $f'(0,0) = (0\ 0)$ gelten muss. Wir rechnen die Differenzierbarkeit mit Hilfe der Definition nach:

$$\frac{r(x,y)}{\|(x,y)-(0,0)\|} = \frac{f(x,y) - f(0,0) - f'(0,0)\cdot(x\ y)^T}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Es bleibt zu zeigen, dass dieser Ausdruck gegen 0 konvergiert falls $(x,y) \to (0,0)$. Hierzu benutzen wir die Abschätzung

$$\frac{|xy|}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2},$$

welche aus $(|x|-|y|)^2 \geq 0$ durch Umstellen resultiert. Es gilt:

$$\left| \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \right| = \frac{\sqrt{x^2+y^2}\cdot x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{4} \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0.$$

Damit ist f total differenzierbar in $(0,0)$.

---

[1] Induziert heißt in diesem Fall, dass $d(x,y) = \|x-y\|$ für alle $x, y \in V$ gilt.