TECHNISCHE UNIVERSITÄT
KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. M. Schulze und Raul Epure | Wintersemester 2018/2019

Grundlagen der Mathematik II
Blatt 26

Abgabetermin: Freitag, 01.02.2019, 10:00 Uhr

Aufgabe 101. Überprüfen Sie, ob durch die folgenden Abbildungen eine Billinearform auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^2$ definiert wird. Geben Sie in diesem Fall die Gramsche Matrix bezüglich der Basis $((1,1)^T,(1,-1)^T)$ an.

(a) $f:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},((x_1,x_2)^T,(y_1,y_2)^T)\mapsto 4x_1y_1-2x_1y_2-2x_2y_1+3x_2y_2$.

(b) $g:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},((x_1,x_2)^T,(y_1,y_2)^T)\mapsto 4x_1-2x_1y_2-2x_2y_1$.

(c) $h:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},((x_1,x_2)^T,(y_1,y_2)^T)\mapsto 2x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1-x_2y_2$.

Welche dieser Abbildungen definieren sogar ein Skalarprodukt?

Aufgabe 102. Sei $\Delta\subseteq\mathbb{R}^2$ die Menge aller Punkte, die innerhalb des Dreiecks $\Delta(ABC)$ mit den Punkten $A=(0,0),B=(0,1)$ und $C=(1,0)$ liegen. Berechnen Sie

$$\int_\Delta e^{x+y}(1+x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 103. Es seien $A\subseteq\mathbb{R}$ eine disjunkte Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Intervallen und

$$D_A:=\{((1-t^2)x,t)\mid x\in A \text{ und } t\in[0,1]\}\subseteq\mathbb{R}^2.$$

(a) Skizzieren Sie D_A für $A=[1,2]$.

(b) Zeigen Sie, dass D_A messbar ist.

(c) Berechnen Sie $\mathrm{vol}(D_A)$ in Abhängigkeit von $\mathrm{vol}(A)$.

Aufgabe 104. Es seien $D\subseteq\mathbb{R}^n$ eine messbare Menge und $f,g:D\to\mathbb{R}$ zwei integrierbare Funktionen mit $g(x)\leq f(x)$ für alle $x\in D$. Zeigen Sie, dass die Menge

$$M:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\mid x\in D, g(x)\leq y\leq f(x)\}\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$$

zwischen den Graphen von f und g messbar ist mit $\mathrm{vol}(M)=\int_D(f(x)-g(x))\mathrm{d}x$.

Hinweis: Sie dürfen Aufgabe 29.12 aus dem Gathmann-Skript ohne Beweis verwenden.