Prof. Dr. M. Schulze und Raul Epure Wintersemester 2018/2019

Grundlagen der Mathematik II
Blatt 23

Abgabetermin: Freitag, 11.01.2019, 10:00 Uhr

Aufgabe 89. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (4x^2 - y^2) \cdot \exp(-x^2 - 4y^2)$. Bestimmen Sie alle Extrema von f.

Aufgabe 90. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto y \exp(x^2+z^2)$. Bestimmen Sie alle globalen Extremstellen von f in $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 91. Sei $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$F(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} u + \cos(u \cdot v) - v \cdot x - 1 \\ \sin(u) - y - v \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass durch $F(x, y, u, v) = 0$ in einer offenen Umgebung U von $(x, y) = (0, -1)$ Funktionen $u = \varphi_1(x, y)$ und $v = \varphi_2(x, y)$ definiert sind mit $\varphi_1(0, -1) = 0$ und $\varphi_2(0, -1) = 1$.

(b) Wir definieren $\varphi : U \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x, y) \\ \varphi_2(x, y) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\varphi(x, y)$ differenzierbar ist und bestimmen Sie $\varphi'(0, -1)$.

Aufgabe 92. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Weiterhin sei $a \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt mit $\det(f'(a)) \neq 0$. Zeigen Sie, unter Verwendung des Satzes über implizite Funktionen, dass es eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von a und eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ von $f(a)$ gibt mit $f|_U : U \to V$ ist bijektiv und $(f^{-1})'(f(x)) = (f'(x))^{-1}$ für alle $x \in U$.