Prof. Dr. M. Schulze und Raul Epure Wintersemester 2018/2019

Grundlagen der Mathematik II
Blatt 22

Abgabetermin: Freitag, 04.01.2019, 10:00 Uhr

Aufgabe 85. Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} \frac{x_1^3}{x_1^2+x_2^2} & \text{falls } (x_1, x_2) \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

und

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} (x_1^2 + x_2^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right) & \text{falls } (x_1, x_2) \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) f besitzt für alle $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ eine Richtungsableitung $\partial_v f$ in $x = (0, 0)$.

(b) f ist nicht total differenzierbar in $x = (0, 0)$.

(c) g ist auf $\mathbb{R}^2$ total differenzierbar.

(d) g ist auf $\mathbb{R}^2$ nicht stetig differenzierbar.

Aufgabe 86. Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} \frac{x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3}{x_1^2+x_2^2} & \text{falls } (x_1, x_2) \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}^2$ zweimal partiell differenzierbar ist, jedoch $\partial_1 \partial_2 f(0, 0) \neq \partial_2 \partial_1 f(0, 0)$.

Aufgabe 87.

(a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x_1, x_2) \mapsto x_1 \exp(x_1^2 + x_2^2)$. Bestimmen Sie ohne technische Hilfsmittel $\partial_1^{2019} \partial_2^{2018} f(0, 0)$.

(b) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x_1, x_2) \mapsto (x_2 - x_1^2)(x_2 - 2x_1^2)$. Zeigen Sie, dass g kein lokales Extremum besitzt, jedoch ein lokales Minimum in $(0, 0)$ existiert, wenn man g auf eine beliebige Ursprungsgerade einschränkt.

Aufgabe 88. Zeigen Sie:

(a) Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ in $x = 0$ total differenzierbar und ist $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$, so ist f eine lineare Abbildung.

(b) Sind $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ total differenzierbar mit $g \circ f$ konstant und $g'(y) \neq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$, so ist $\det(f'(x)) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.