TECHNISCHE UNIVERSITÄT
KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. M. Schulze und Raul Epure Wintersemester 2018/2019

Grundlagen der Mathematik II
Blatt 21

Abgabetermin: Freitag, 14.12.2018, 10:00 Uhr

Aufgabe 81. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Stetigkeit:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} \frac{(x_1^2+x_2^2)^3}{x_1^4+x_2^4} & \text{falls } (x_1, x_2) \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} \frac{(x_1^2+x_2^2)^2}{x_1^4+x_2^4} & \text{falls } (x_1, x_2) \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Aufgabe 82. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeigen Sie:

(a) $f : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), A \mapsto A^{-1}$ ist stetig.
(b) Die Menge $O(n)$ ist als Teilmenge von $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ kompakt.
(c) Die Menge aller indefiniten symmetrischen Matrizen ist offen im Raum aller symmetrischen $n \times n$ Matrizen.

Aufgabe 83. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $A_0 \supsetneq A_1 \supsetneq A_2 \supsetneq \ldots$ eine absteigende Folge nicht-leerer kompakter Mengen $A_i \subset M$ und sei $A := \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$. Zeigen Sie:

(a) $A \neq \emptyset$.
(b) A ist kompakt.

Aufgabe 84. Es sei $\{U_i \mid i \in I\}$ eine offene Überdeckung eines kompakten metrischen Raumes (M, d). Zeigen Sie, dass es dann ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so dass jede offene ε-Kugel in M bereits in einem U_i enthalten ist.