Prof. Dr. M. Schulze und Raul Epure — Wintersemester 2018/2019

Grundlagen der Mathematik II
Blatt 18

Abgabetermin: Freitag, 23.11.2018, 10:00 Uhr

Aufgabe 69. Bestimmen Sie je eine Orthonormalbasis folgender Untervektorräume:

(a) $U = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^4.$

(b) $V = \left\langle \begin{pmatrix}1\\i\\i\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\1\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\i\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2+i\\2i+1\\i+2\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{C}^5.$

Aufgabe 70. Sei V der Vektorraum der stetigen reellwertigen Funktionen auf $[0, 2\pi]$ mit Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$ für $f, g \in V$.

(a) Wir definieren die Familie $B = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$b_n := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{falls } n = 0, \\ \cos(kx) & \text{falls } n = 2k-1, \text{mit } k \in \mathbb{N}_{>0}, \\ \sin(kx) & \text{falls } n = 2k, \text{mit } k \in \mathbb{N}_{>0}. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass B eine Orthonormalbasis von $W = \langle B\rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \dots \right\rangle$ bildet.

(b) Sei $f \in V$ mit $f(x) = x - \pi$ für alle $x \in [0, 2\pi]$ und sei für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ $U_n := \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \dots, \cos(nx), \sin(nx) \right\rangle$. Bestimmen Sie die orthogonale Projektion von f auf U_n.

Hinweis: Die Additionstheoreme aus Satz 9.13 c) könnten sich bei der Berechnung einiger Integrale als nützlich erweisen.

Aufgabe 71. Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit dem Standard Skalarprodukt $\langle -, -\rangle$ und $f : V \to V$ ein Endomorphismus mit $\langle f(x), x\rangle = 0$ für alle $x \in V$. Zeigen Sie:

(a) Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so ist f die Nullabbildung.

(b) Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so ist f nicht notwendigerweise die Nullabbildung.

Aufgabe 72. Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und U ein endlich erzeugter Untervektorraum von V. Im Folgenden bezeichne $\|\cdot\|$ die durch das Skalarprodukt induzierte Norm und $\pi : V \to U$ die orthogonale Projektion von V auf U. Wir definieren den **Abstand von x zu U** als

$$d(x, U) := \inf\left(\{\|x - y\| \mid y \in U\}\right).$$

Zeigen Sie:

(a) Für den Abstand von x zu U gilt:

$$d(x, U) = \|x - \pi(x)\|.$$

(b) Ist $a \in V \setminus \{0\}$ ein beliebiger Vektor und $U := \{y \in V \mid \langle a, y \rangle = 0\}$, so gilt:

$$d(x, U) = \frac{|\langle a, x \rangle|}{\|a\|}.$$