Prof. Dr. M. Schulze und Raul Epure Wintersemester 2018/2019

# Grundlagen der Mathematik II
## Blatt 17

Abgabetermin: Freitag, 16.11.2018, 10:00 Uhr

---

**Aufgabe 65.** Sei $V = \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ und $W = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = 0 \text{ bis auf endlich viele } x \in \mathbb{R}\}$. $V$ und $W$ sind $\mathbb{R}$-Vektorräume. Letzteres muss nicht bewiesen werden.

(a) Zeigen Sie, dass $b_V : V \times V \to \mathbb{R},\ (A, B) \mapsto \mathrm{Spur}(A^T B)$ eine positiv definite Bilinearform ist. Gilt dies auch, wenn man $A^T$ durch $A$ in der Definition ersetzt?

(b) Bestimmen Sie die Gramsche Matrix $A_{b_V}$ bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(c) Zeigen Sie, dass $b_W : W \times W \to \mathbb{R},\ (f, g) \mapsto \sum f(x) \cdot g(x)$, wobei über alle $x \in \mathbb{R}$ summiert wird mit $f(x) \neq 0$ oder $g(x) \neq 0$, eine symmetrische Bilinearform auf $W$ definiert. Ist diese auch positiv definit?

(d) Bestimmen Sie eine Basis $B$ von $W$, sodass für alle $f, g \in B$ gilt:
$$b_W(f, g) = \begin{cases} 1 \text{ falls } f = g \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

**Aufgabe 66.** Bestimmen Sie die Jordannormalformen der folgenden Matrizen:

(a) $A \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$ mit $A^4 + 12A^2 = 6A^3 + 8A$ und $2\,\mathrm{rk}(A - 2E_4) = \mathrm{rk}(A)$.

(b) $B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}),\ n \geq 1$, mit $\mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Im}(B)$.

**Aufgabe 67.** Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(a) Eine Bilinearform $b : V \times V \to \mathbb{K}$ heißt **schiefsymmetrisch**, falls $b(v, w) = -b(w, v)$ für alle $v, w \in V$ gilt. Zeigen Sie, dass sich alle $b \in \mathrm{BLF}(V)$ eindeutig als Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Bilinearform schreiben lassen.

(b) Eine Abbildung $q : V \to \mathbb{R}$ heißt **quadratische Form**, falls $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$ und $q(v + w) + q(v - w) = 2q(v) + 2q(w)$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v, w \in V$ gilt. Zeigen Sie, dass es zu jeder symmetrischen Bilinearform auf $V$ eine quadratische Form auf $V$ gibt.

**Aufgabe 68.** Sei $V$ ein endlich erzeugter $\mathbb{C}$-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$. Ziel dieser Aufgabe ist es eine abstrakte Jordanzerlegung von $f$ anzugeben: Wir wollen zeigen, dass es eindeutige lineare Abbildungen $f_D, f_N \in \mathrm{End}(V)$ gibt mit $f = f_D + f_N$ und $f_D \circ f_N = f_N \circ f_D$. Dabei ist $f_D$ diagonalisierbar und $f_N$ **nilpotent**, d.h. es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $f^k = 0 \in \mathrm{End}(V)$. Sei $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^{m} (t - \lambda_i)^{m_i}$ das charakteristische Polynom von $f$, wobei die $\lambda_i$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von $f$ sind. Zeigen Sie:

(a) Die lineare Abbildung $f_D \in \mathrm{End}(V)$ definiert durch $f_D(v) = \lambda_i v$ für alle $v \in \mathrm{H}(A, \lambda_i),\ i = 1, \ldots, m$ ist diagonalisierbar und $f_N := f - f_D$ ist nilpotent.

(b) Angenommen es gibt ein Polynom $p(t) \in \mathbb{C}[t]$ mit $(t - \lambda_i)^{m_i} \mid (p(t) - \lambda_i)$ für alle $i = 1, \ldots, m$. Dann ist $p(f) = f_D$ und $f - p(f) = f_N$.

(c) Es gilt $f_D \circ f_N = f_N \circ f_D$.

(d) Die linearen Abbildungen $f_D$ und $f_N$ sind eindeutig bestimmt.

*Hinweis zu (c) und (d):* Nehmen Sie an, dass die Aussage aus (b) im Allgemeinen gilt. Sie kann z.B. mit Hilfe des *Chinesischen Restsatzes* gezeigt werden.