Prof. Dr. M. Schulze und Raul Epure Wintersemester 2018/2019

Grundlagen der Mathematik II
Blatt 16

Abgabetermin: Freitag, 09.11.2018, 10:00 Uhr

Aufgabe 61. Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R}) \text{ und } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(5 \times 5, \mathbb{R}).$$

(a) Bestimmen Sie die Jordannormalformen J_A und J_B von A und B.

(b) Bestimmen Sie Matrizen $S \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ und $T \in \mathrm{GL}(5, \mathbb{R})$, sodass $S^{-1}AS = J_A$ und $T^{-1}BT = J_B$.

Hinweis: Die Matrix B besitzt 2 verschiedene ganzzahlige Eigenwerte mit algebraischer Vielfachheit 2 bzw. 3.

Aufgabe 62. Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ mir $\mathrm{rk}(A) = 1$ Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) t^{n-1} teilt $\chi_A(t)$.

(b) A ist diagonalisierbar.

(c) $\mathrm{Spur}(A)$ ist Eigenwert von A.

Aufgabe 63. Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$. Wir nennen A **nilpotent**, falls ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $A^k = 0$. Wir definieren zudem $\mathcal{N} := \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C}) \mid A \text{ nilpotent}\}$. Ziel dieser Aufgabe ist es die Exponentialfunktion auf nilpotente Matrizen zu verallgemeinern.

(a) Zeigen Sie: Aus $A^k = 0$ folgt $A^i = 0$ für alle $i \geq k$.

Wir definieren die Exponentialfunktion als

$$\exp : \mathcal{N} \to \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C}), A \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!},$$

wobei die Summe nach Teilaufgabe (a) endlich ist.

(b) Zeigen Sie: Ist $A \in \mathcal{N}$ und $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, so folgt $\exp(S^{-1}AS) = S^{-1}\exp(A)S$.

(c) Geben Sie eine explizite Formel für $\det(\exp(A))$ an und beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Formel.

Aufgabe 64. Sei $V = \mathbb{C}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Eine lineare Abbildung $f \in \mathrm{End}(V)$ heisst **trigonalisierbar**, wenn es eine Folge von Untervektorräumen

$$U_0 := \{0\} \subsetneq U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \ldots \subsetneq U_n = V$$

gibt, mit $\dim(U_i) = i$ und $f(U_i) \subset U_i$ für $i \geq 1$.

(a) Zeigen Sie, dass eine lineare Abbildung $f \in \mathrm{End}(V)$ genau dann trigonalisierbar ist, wenn es eine Basis B von V gibt, sodass die Darstellungsmatrix A_f^B eine obere Dreiecksmatrix ist.

(b) Seien $f, g \in \mathrm{End}(V)$ zwei trigonalisierbare lineare Abbildungen mit $f \circ g = g \circ f$. Zeigen Sie, dass es eine Basis B von V gibt, bezüglich welcher A_f^B und A_g^B obere Dreiecksmatrizen sind.

Hinweis zu Teilaufgabe b): Verwenden Sie Aufgabe 50 von Blatt 12 und Aufgabe 60 von Blatt 15.