TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. M. Schulze und Raul Epure | Wintersemester 2018/2019

Grundlagen der Mathematik II
Blatt 15

Abgabetermin: Freitag, 02.11.2018, 10:00 Uhr

Aufgabe 57. Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

mit $A, B \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$.

(a) Untersuchen Sie A und B auf Diagonalisierbarkeit. Geben Sie ggf. Matrizen $S, T \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ an, sodass $S^{-1}AS$ bzw. $T^{-1}BT$ in Diagonalgestalt sind.

(b) Sind A und B ähnlich zueinander? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 58. Seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$. Zeigen Sie:

(a) Wenn $AB = BA$, so gilt:

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Gilt die Formel in (a) auch dann, wenn $AB \neq BA$?

(c) Ist A invertierbar und λ ein Eigenwert von A, so ist λ^{-1} ein Eigenwert von A^{-1}, $\mu_g(A, \lambda) = \mu_g(A^{-1}, \lambda^{-1})$ und $\mu_a(A, \lambda) = \mu_a(A^{-1}, \lambda^{-1})$.

Aufgabe 59. Gegeben sei die Folge der *Fibonacci - Zahlen* $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $F_0 = 0, F_1 = 1$ und $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n \geq 2$. Ziel dieser Aufgabe ist es einen expliziten Ausdruck für F_n zu finden.

(a) Bestimmen Sie eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$, sodass

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix}.$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Finden Sie mit Hilfe von (a) und (b) einen nicht - rekursiven Ausdruck für F_n.

Aufgabe 60. Es seien $f, g : V \to V$ zwei diagonalisierbare Endomorphismen eines endlich erzeugten K - Vektorraumes V, sodass $f \circ g = g \circ f$. Die Eigenwerte von f und g werden mit $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ bzw. $\mu_1, \dots, \mu_l$ bezeichnet. Zeigen Sie:

(a) $g(\mathrm{Eig}(f, \lambda_i)) \subset \mathrm{Eig}(f, \lambda_i)$ für alle $i = 1, \dots, k$.

(b) $\mathrm{Eig}(g, \mu_j) = \mathrm{Eig}(f, \lambda_1) \cap \mathrm{Eig}(g, \mu_j) \oplus \dots \oplus \mathrm{Eig}(f, \lambda_k) \cap \mathrm{Eig}(g, \mu_j)$ für $j = 1, \dots, l$.

(c) Es gibt eine Basis B von V, sodass sowohl A_f^B als auch A_g^B Diagonalgestalt besitzen.