TECHNISCHE UNIVERSITÄT
KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. M. Schulze und R. Epure — Sommersemester 2018

Grundlagen der Mathematik I
Nachklausur

08. Oktober 2018

Name: ____________________ Matrikel-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (2 + 3 Punkte)**.** Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{e^{5x}-1-5x}$.

(b) $\lim\limits_{x\to 0} (2+x)^{\frac{e^x-1-x}{x^2}}$.

Aufgabe 2 (2 + 3 + 2 Punkte)**.** Gegeben sei die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ 3x_2 + 2x_3 \\ -3x_1 + 3x_3 \end{pmatrix}.$$

Ferner bezeichne $E = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$.

Seien

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ und } C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

ebenfalls Basen von $\mathbb{R}^3$. Sie müssen nicht nachweisen, dass B, C und E Basen sind.

(a) Bestimmen Sie $A_f^{E,E}$.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $A_f^{B,C}$.

(c) Berechnen Sie die Determinanten $\det\left(A_f^{E,E}\right)$ und $\det\left(A_f^{B,C}\right)$.

Aufgabe 3 (3 + 3 Punkte)**.**

(a) Berechnen Sie $\int \frac{1}{x^2-3x}\mathrm{d}x$.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Formel $\int\limits_0^\infty x^n e^{-x}\mathrm{d}x = n!$ gilt.

– Bitte wenden –

Aufgabe 4 (2 + 2 + 2 + 2 Punkte)**.** Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) Ist $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sind $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$, so gilt $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

(b) Sind (a_n) und (b_n) Folgen reeller Zahlen, ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R_1 \in \mathbb{R}$ und ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R_2 \in \mathbb{R}$, so hat die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ Konvergenzradius $R \geq \min(R_1, R_2)$.

(c) Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine nach oben beschränkte, monoton fallende Folge reeller Zahlen, so hat die Folge $b_n = (-1)^n a_n$ mindestens einen Häufungspunkt $H \in \mathbb{R}$.

(d) Ist $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige Funktion, so ist f differenzierbar.

Aufgabe 5 (3 + 3 Punkte)**.** Seien $U, V \leq \mathbb{R}^8$ Untervektorräume mit $\dim(U) = 7$ und $\dim(V) = 5$.

(a) Zeigen Sie, dass gilt:
$$4 \leq \dim(U \cap V) \leq 5.$$

(b) Geben Sie für beide möglichen Werte von $\dim(U \cap V)$ jeweils explizit Untervektorräume U und V an, welche die in der Aufgabenstellung genannten Eigenschaften erfüllen. Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 6 (2 + 3 Punkte)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Weiterhin sei $c \in (a, b)$ fest.

(a) Sei Z eine Zerlegung von $[a, b]$ und $Z' = Z \cup \{c\}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{OS}(f, Z) \geq \mathrm{OS}(f, Z')$.

(b) Sei f integrierbar auf $[a, b]$. Zeigen Sie, dass f dann auch auf $[a, c]$ und $[c, b]$ integrierbar ist.

Aufgabe 7 (3 + 4 Punkte)**.** Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = 0$. Zeigen Sie:

(a) Existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = c$, so ist f gleichmäßig stetig auf $[0, \infty)$.

(b) Ist f auf $(0, \infty)$ differenzierbar mit monoton wachsender Ableitung f', so ist die Funktion $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ monoton wachsend.

Aufgabe 8 (5 Punkte)**.** Seien $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir definieren die Matrix $A(x) \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ durch
$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ x^{n-1} & 1 & x & \dots & x^{n-2} \\ x^{n-2} & x^{n-1} & 1 & \dots & x^{n-3} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ x & x^2 & x^3 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie $\det(A(x))$ und begründen Sie Ihre Antwort!

– Viel Erfolg –