TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. M. Schulze und R. Epure — Sommersemester 2018

Grundlagen der Mathematik I
Lösung zu Blatt 13

Keine Abgabe

Aufgabe 51.

(a) Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & -7 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 44 & 55 \\ 3 & 4 & 66 & 77 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

(b) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix} = -\left(\prod_{i=1}^n a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right)$$

Lösung.

(a) Fur A ergibt sich durch Entwicklung nach der *ersten Spalte*:

$$\det(A) = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 8 & -7 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = -21 - 40 + (-5) - 6 = -72.$$

Für B ergibt sich durch Anwendung des Gaußalgorithmus zunächst:

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2Z1+Z2\to Z2]{3Z4+Z1\to Z1} \begin{pmatrix} 0 & 10 & 14 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-10Z3+Z1\to Z1]{3Z3+Z2\to Z2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & -19 \\ 0 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2Z2+Z1\to Z1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Jetzt haben wir eine Matrix mit einer diagonalen Gestalt, womit wir durch Entwickeln nach der letzten Spalte

$$\det(B) = 3 \cdot (-2) = -6$$

erhalten.

Bei Matrix C erkennen wir die Blockgestalt und können Aufgabe 18.24 aus dem Skript benutzen:

$$\det(C) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = (-2) \cdot (-2) = 4.$$

(b) Aus der Vorlesung wissen wir, dass das Addieren der Vielfachen einer Zeile zu einer anderen die Determinante nicht ändert. Damit gilt

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

Schließlich wissen wir auch aus der Vorlesung, dass die Determinante einer Dreiecksmatrix das Produkt ihrer Diagonaleinträge ist, also

$$\det \begin{pmatrix} -\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} = -\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right).$$

Aufgabe 52. Gegeben sei die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3\\x_3\\x_1+x_2\\x_1-x_3\end{pmatrix}.$$

Ferner bezeichnen E_1 und E_2 die kanonischen Basen von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$.
Seien

$$B_1 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) \text{ und } B_2 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$$

ebenfalls Basen von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$. $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ sei eine weitere lineare Abbildung mit

$$A_g^{B_1,B_2} = \begin{pmatrix}1&0&0\\3&0&2\\5&-1&0\\0&1&3\end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $A_f^{E_1,E_2}$.

(b) Geben Sie die Basiswechselmatrizen A^{B_1,E_1} und A^{B_2,E_2} an.

(c) Bestimmen Sie $A_f^{B_1,B_2}$ und $A_f^{E_1,B_2}$.

(d) Bestimmen Sie $A_g^{E_1,E_2}$.

Lösung.

(a) Um die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Standardbasen zu berechnen benötigt man die Bilder der kanonische Basisvektoren:

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \; f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \; f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

Danach schreibt man diese einfach als die Spalten der Matrix $A_f^{E_1,E_2}$:

$$A_f^{E_1,E_2} = \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\1&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}.$$

(b) Die Basiswechselmatrizen von B_1 nach E_1, bzw. von B_2 nach E_2 ergeben sich wie eben durch das Schreiben der Vektoren als Spalten der Matrix:

$$A^{B_1,E_1} = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}, \; A^{B_2,E_2} = \begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

(c) Um die gesuchten Darstellungsmatrizen zu berechnen, betrachten wir zunächst das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3_{B_1} \arrow[r, "A_f^{B_1,B_2}"] \arrow[d, "A^{B_1,E_1}"'] & \mathbb{R}^4_{B_2} \arrow[d, "A^{B_2,E_2}"] \\
\mathbb{R}^3_{E_1} \arrow[r, "A_f^{E_1,E_2}"'] & \mathbb{R}^4_{E_2}
\end{tikzcd}$$

Hierbei bezeichnet $\mathbb{R}^3_{E_1}$ das $\mathbb{R}^3$ mit der kanonischen Basis etc. Aus dem kommutativen Diagramm können wir sofort herauslesen, dass

$$A_f^{B_1,B_2} = (A^{B_2,E_2})^{-1} A_f^{E_1,E_2} A^{B_1,E_1} \text{ und } A_f^{E_1,B_2} = (A^{B_2,E_2})^{-1} A_f^{E_1,E_2}$$

gilt.

Da wir alle Matrizen außer $(A^{B_2,E_2})^{-1}$ haben, muss nur diese berechnet werden.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-Z2+Z1\to Z1]{Z4+Z3\to Z3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-Z3+Z2\to Z2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Somit ist

$$\left(A^{B_2,E_2}\right)^{-1} = A^{E_2,B_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alternativ hätte man auch die kanonischen Basisvektoren in der Basis B_2 ausdrücken können und dann die Koordinaten als Spalten einer Matrix schreiben können (vgl. Tutorium) und dasselbe Ergebnis wäre herausgekommen. Hiermit ergibt sich:

$$A_f^{E_1,B_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und

$$A_f^{B_1,B_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Aus dem kommutativen Diagramm von eben sehen wir:

$$A_g^{E_1,E_2} = A^{B_2,E_2} A_g^{B_1,B_2} \left(A^{B_1,E_1}\right)^{-1},$$

womit nur $(A^{B_1,E_1})^{-1}$ berechnet werden muss. Hierzu stellen wir die kanonischen Basisvektoren durch die Basis B_1 dar:

$$e_1 = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3 = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$\left(A^{B_1,E_1}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie oben ergibt sich dann:

$$A_g^{E_1,E_2} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 3 & 4 & -5 \\ -1 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 53. Sei K ein Körper und $m, n, p, r \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ und $B \in \mathrm{Mat}(n \times p, K)$ gilt
$$\mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(B) - n \leq \mathrm{rk}(AB) \leq \min(\mathrm{rk}(A), \mathrm{rk}(B)).$$

(b) Ist $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ eine Matrix von Rang $r \leq \min(m, n)$, dann gibt es Matrizen $B \in \mathrm{Mat}(m \times r, K)$ und $C \in \mathrm{Mat}(r \times n, K)$, sodass $A = BC$.

Hinweis zu (a): Verwenden Sie Aufgabe 49.

Lösung.

(a) Wir identifizieren die Matrizen mit entsprechenden linearen Abbildungen. Seien U, V, W Vektorräume mit $\dim(U) = p, \dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Weiterhin sei $f : U \to V$ die zu B gehörige lineare Abbildung und $g : V \to W$ die zu A gehörende lineare Abbildung. Dann ist $\mathrm{rk}(A) = \dim(\mathrm{Im}(g))$ und $\mathrm{rk}(B) = \dim(\mathrm{Im}(f))$.
Wir wissen aus Aufgabe 49, dass gilt:
$$\dim(\mathrm{Ker}(g \circ f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f))$$
Nun ist $\dim(\mathrm{Ker}(g \circ f)) = \dim(U) - \dim(\mathrm{Im}(g \circ f))$, womit
$$\begin{aligned}\dim(U) - \dim(\mathrm{Im}(g \circ f)) &= \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f)) \\ &= \dim(U) - \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f)) \\ &\leq \dim(U) - \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(g)) \\ &= \dim(U) - \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(V) - \dim(\mathrm{Im}(g))\end{aligned}$$
Umstellen ergibt:
$$\begin{aligned}\mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(B) - n &= \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(g)) - \dim(V) \\ &\leq \dim(\mathrm{Im}(g \circ f)) = \mathrm{rk}(AB).\end{aligned}$$
Nun zeigen wir den zweiten Teil der Abschätzung. zunächst ist klar, dass $\mathrm{Im}(g \circ f) \leq \mathrm{Im}(g)$, wodurch $\mathrm{rk}(AB) \leq \mathrm{rk}(A)$ gilt. Mit der Formel aus Aufgabe 49 gilt weiterhin:
$$\begin{aligned}&\dim(U) - \dim(\mathrm{Im}(g \circ f)) \geq \dim(\mathrm{Ker}(f) \\ \iff &\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(U) - \dim(\mathrm{Ker}(f) \geq \dim(\mathrm{Im}(g \circ f)),\end{aligned}$$
da $\dim(\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}\, f) \geq 0$. Hieraus folgt sofort $\mathrm{rk}(AB) \leq \mathrm{rk}(B) = \dim(\mathrm{Im}(f))$. Kombinieren beider Abschätzungen ergibt:
$$\mathrm{rk}(AB) \leq \min(\mathrm{rk}(A), \mathrm{rk}(B)),$$
womit die Behauptung gezeigt ist.

(b) Aus der Vorlesung wissen wir, dass es Matrizen $U \in \mathrm{Mat}(m \times m, K)$ und $V \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ gibt, so dass
$$A = U \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) V.$$
Das können wir schreiben als
$$A = U \underbrace{\left(\begin{array}{c} E_r \\ \hline 0 \end{array}\right)}_{B'} \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \end{array}\right)}_{C'} V$$
wobei $B' \in \mathrm{Mat}(m \times r, K), C' \in \mathrm{Mat}(r \times n, K)$. Definieren wir $B = UB'$ und $C = C'V$, so erhalten wir das Gewünschte.

Aufgabe 54.

(a) Bestimmen Sie Basen von Bild und Kern folgender Matrizen über $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden reellen Gleichungssysteme, ggf. in Abhängigkeit vom Parameter $t \in \mathbb{R}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 12t \\ 2 & 12 & 7 & 12t+7 \\ 1 & 10 & 6 & 7t+8 \end{array}\right)$$

Lösung.

(a) Wir beginnen mit der Matrix A. Wir bringen diese in reduzierte Zeilenstufen Form (s. Definition 17.5). Nach Algorithmus 17.17 können wir dann Erzeuger von Kern und Bild ablesen. Hierbei entsprechen die Erzeuger vom Kern genau den Spalten in der **transformierten** Matrix, in denen eine -1 eingefügt wurde, und die Erzeuger vom Bild entsprechen den übrigen Spalten in der **Ausgangsmatrix**.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-Z1+2Z2\to Z2 \\ -Z1+2Z4\to Z4}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z2+Z4\to Z2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{-\frac{1}{2}Z2\to Z2 \\ 3Z2-Z4\to Z4}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\frac{1}{2}(Z1-Z2+Z3)\to Z1 \\ \text{Sortieren}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix A ist nun in reduzierter Zeilenstufen Form und es kann keine -1 eingefügt werden. Damit ergibt sich:

$$\operatorname{Ker}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ und } \operatorname{Im}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Nun führen wir dasselbe Verfahren mit der Matrix B durch:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-Z1+Z3\to Z3 \\ -Z2+Z4\to Z4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{Z3+Z1\to Z1 \\ -Z2+Z1\to Z1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-Z3\to Z3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Einfügen der -1 und einer 0 Zeile ergibt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\operatorname{Ker}(B) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ und } \operatorname{Im}(B) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(b) Wir fangen mit dem ersten Gleichungssystem an führen es auf reduzierte Zeilenstufenumformungen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-3Z2+Z4\to Z4]{-2Z2+2Z3\to Z3} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{Sortieren}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[2Z2+Z3\to Z3]{Z2+Z4\to Z4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-2Z2+Z1\to Z1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

An dieser Stelle kann man ablesen, dass für die Lösungsmenge gilt:

$$\mathbb{L} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Das zweite Gleichungssystem hat einen Parameter, dennoch kann man dasselbe Verfahren benutzen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 12t \\ 2 & 12 & 7 & 12t+7 \\ 1 & 10 & 6 & 7t+8 \end{array}\right) \xrightarrow[-2Z3+Z2\to Z2]{-2Z3+Z1\to Z1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -16 & -10 & -2t-16 \\ 0 & -8 & -5 & -2t-9 \\ 1 & 10 & 6 & 7t+8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{Sortieren}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 10 & 6 & 7t+8 \\ 0 & -8 & -5 & -2t-9 \\ 0 & -16 & -10 & -2t-16 \end{array}\right) \xrightarrow[2Z2+Z3\to Z3]{-Z2\to Z2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 10 & 6 & 7t+8 \\ 0 & 8 & 5 & 2t+9 \\ 0 & 0 & 0 & 2t+2 \end{array}\right)$$

An dieser Stelle sieht man bereits, dass nur für $t = -1$ Lösungen existieren können. Deswegen setzen wir jetzt überall $t = -1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 10 & 6 & 1 \\ 0 & 8 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{8}Z2\to Z2]{-\frac{10}{8}Z2+Z1\to Z1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-2}{8} & \frac{-62}{8} \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Für lineare Gleichungssysteme wissen wir, dass sich die Lösung ein affiner Untervektorraum ist (s. Definition 14.15 und Satz 17.1). Da die Matrix in reduzierter Zeilenstufenform ist, können wir die Lösungsmenge im Fall $t = -1$ einfach ablesen (s. Algorithmus 17.8).

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} \frac{-62}{8} \\ \frac{7}{8} \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} \frac{-2}{8} \\ \frac{5}{8} \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} \frac{-62}{8} \\ \frac{7}{8} \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Für den Fall $t \neq -1$ erhalten wir:

$$\mathbb{L} = \emptyset .$$