Prof. Dr. M. Schulze und R. Epure Sommersemester 2018

Grundlagen der Mathematik I
Blatt 13

Keine Abgabe

Aufgabe 51.

(a) Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$::

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & -7 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 44 & 55 \\ 3 & 4 & 66 & 77 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

(b) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix} = -\left(\prod_{i=1}^n a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right)$$

Aufgabe 52. Gegeben sei die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}.$$

Ferner bezeichnen E_1 und E_2 die kanonischen Basen von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$.
Seien

$$B_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ und } B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

ebenfalls Basen von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$. $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ sei eine weitere lineare Abbildung mit

$$A_g^{B_1,B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $A_f^{E_1,E_2}$.

(b) Geben Sie die Basiswechselmatrizen A^{B_1,E_1} und A^{B_2,E_2} an.

(c) Bestimmen Sie $A_f^{B_1,B_2}$ und $A_f^{E_1,B_2}$.

(d) Bestimmen Sie $A_g^{E_1,E_2}$.

Aufgabe 53. Sei K ein Körper und $m, n, p, r \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ und $B \in \mathrm{Mat}(n \times p, K)$ gilt

$$\mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(B) - n \leq \mathrm{rk}(AB) \leq \min(\mathrm{rk}(A), \mathrm{rk}(B)).$$

(b) Ist $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ eine Matrix von Rang $r \leq \min(m, n)$, dann gibt es Matrizen $B \in \mathrm{Mat}(m \times r, K)$ und $C \in \mathrm{Mat}(r \times n, K)$, sodass $A = BC$.

Hinweis zu (a): Verwenden Sie Aufgabe 49.

Aufgabe 54.

(a) Bestimmen Sie Basen von Bild und Kern folgender Matrizen über $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden reellen Gleichungssysteme, ggf. in Abhängigkeit vom Parameter $t \in \mathbb{R}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 12t \\ 2 & 12 & 7 & 12t+7 \\ 1 & 10 & 6 & 7t+8 \end{array}\right)$$