Prof. Dr. M. Schulze und R. Epure Sommersemester 2018

# Grundlagen der Mathematik I
## Blatt 12

Abgabetermin: Montag, 09.07.2018, 10:00 Uhr

---

**Aufgabe 47.**

(a) Bestimmen Sie alle möglichen Produkte der folgenden Matrizen über $\mathbb{Q}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & -7 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie alle Potenzen von $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$.

**Aufgabe 48.** Sei $V = \mathbb{R}^4$.

(a) Zeigen Sie, dass $B = (e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_3 - e_4, e_4)$ eine Basis von $V$ ist.

(b) Ergänzen Sie die linear unabhängige Familie $(e_1, e_2)$ mit Hilfe von Satz 15.13 **angewandt auf** $B$ zu einer Basis von $V$.

(c) Sei $W = V/U$ mit $U = \langle e_1 + 2e_2, e_4 + 2e_3\rangle$. Bestimmen Sie $\dim(W)$ und untersuchen Sie, ob $\overline{B} = (\overline{e_2 + e_3}, \overline{e_1 + e_4})$ eine Basis von $W$ bildet.

**Aufgabe 49.** Sei $K$ ein Körper und seien $U, V, W$ endlich-erzeugte $K$-Vektorräume, sowie $f : U \to V$ und $g : V \to W$ lineare Abbildungen.

(a) Sei $Z \leq V$ ein beliebiger Untervektorraum von $V$. Zeigen Sie

$$\dim(f^{-1}(Z)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(Z \cap \mathrm{Im}(f)).$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\dim(\mathrm{Ker}(g \circ f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f)).$$

**Aufgabe 50.** Sei $K$ ein Körper, $V$ ein endlich erzeugter $K$-Vektorraum und $U \leq V$ ein Untervektorraum. Ferner seien $B = (x_1, \ldots, x_k)$ und $C = (x_1, \ldots, x_n)$ Basen von $U$ bzw. $V$, sodass $B' = (\overline{x_{k+1}}, \ldots, \overline{x_n})$ eine Basis von $V/U$ ist. Wir betrachten $f : V \to V$ mit $f(U) \subset U$. Wir definieren die lineare Abbildung $g : U \to U,\ x \mapsto f(x)$ und die Abbildung $h : V/U \to V/U,\ \overline{x} \mapsto \overline{f(x)}$. Nach Aufgabe 46 (b) ist $h$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung $f$ bezüglich Start-und Zielbasis $C$ dann die Blockform

$$A_f^{C,C} = \left(\begin{array}{c|c} A_g^{B,B} & * \\ \hline 0 & A_h^{B',B'} \end{array}\right)$$

hat, wobei "$*$" und "0" für Blöcke der Größe $k \times (n-k)$ bzw. $(n-k) \times k$ stehen, in denen alle Einträge beliebig bzw. 0 sind.