Prof. Dr. M. Schulze und R. Epure Sommersemester 2018

Grundlagen der Mathematik I
Blatt 11

Abgabetermin: Montag, 02.07.2018, 10:00 Uhr

Aufgabe 43. Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der angegebenen Vektorräume?

(a) $U_1 := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 3x_2 = 3x_3\right\} \subset \mathbb{R}^3$.

(b) $U_2 := \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^4 + x_3^6 + x_4^8 = 0\right\} \subset \mathbb{R}^4$.

(c) $U_3 := \left\{(\mu + \lambda, \lambda^2) \in \mathbb{R}^2 \mid \mu, \lambda \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathbb{R}^2$.

(d) $U_4 := \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x + 2\pi) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Beweisen Sie ihre Behauptung!

Aufgabe 44. Sei K ein Körper und $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Zeigen Sie, dass für einen endlich erzeugten K-Vektorraum V und für Untervektorräume $U_1, \dots, U_k \leq V$ folgende Bedingungen äquivalent sind:

(a) $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$

(b) $V = U_1 + \ldots + U_k$ und aus $u_1 + \ldots + u_k = 0, u_i \in U_i$, folgt $u_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, k$.

(c) $V = U_1 + \ldots + U_k$ und $U_i \cap \Big(U_1 + \ldots + U_{i-1} + U_{i+1} + \ldots + U_k\Big) = \{0\}$ für alle $i = 1, \ldots, k$.

(d) $V = U_1 + \ldots + U_k$ und $U_i \cap \Big(U_{i+1} + \ldots + U_k\Big) = \{0\}$ für alle $i = 1, \ldots, k$.

(e) $V = U_1 + \ldots + U_k$ und $\dim(V) = \dim(U_1) + \ldots + \dim(U_k)$.

Aufgabe 45. Bestimmen Sie Basen und Dimensionen folgender Untervektorräume:

(a) $U_1 := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_3\right\} \leq \mathbb{R}^3$.

(b) $U_{2,d} := V_d \leq \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ für beliebige $d \in \mathbb{N}$. (vgl. Aufgabe 42)

(c) $U_3 := \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) = 0 \text{ bis auf endlich viele } x\} \leq \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Beweisen Sie ihre Behauptung!

Aufgabe 46. Im folgenden seien V und W K-Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung.

(a) Wir definieren den Kokern als $\mathrm{Coker}(f) := W/\mathrm{Im}(f)$. Zeigen Sie, dass f genau dann surjektiv ist, wenn $\mathrm{Coker}(f) = 0$.

(b) Sei $W = V$ und $U \leq V$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie, dass $f(U) \subset U$ genau dann gilt, wenn $\overline{f} : V/U \to V/U$, $\overline{x} \mapsto \overline{f(x)}$ eine lineare Abbildung definiert.