TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. M. Schulze und R. Epure Sommersemester 2018

Grundlagen der Mathematik I
Blatt 10

Abgabetermin: Montag, 25.06.2018, 10:00 Uhr

Aufgabe 39. Berechnen Sie folgende (z.T. uneigentliche und unbestimmte) Integrale:

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)\sin(x)\,\mathrm{dx}$

(b) $\int \operatorname{arsinh}(x)\,\mathrm{dx}$

(c) $\int_2^4 \frac{x^2+1}{x^2-1}\,\mathrm{dx}$

(d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{\frac{x^2}{2}}}{1+e^{x^2}}\,\mathrm{dx}$

Aufgabe 40. Sei $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Wir definieren

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{dt}\,.$$

Beweisen Sie:

(a) $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ für alle $x > 0$.

(b) $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 41. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Weiterhin seien die Abbildungen $f_+, f_- : [a, b] \to \mathbb{R}$ wie in Aufgabe 27 definiert.
Zeigen Sie, dass f genau dann integrierbar ist, wenn f_+ und f_- integrierbar sind.

Aufgabe 42.

(a) Sei K ein Körper mit unendlich vielen Elementen. Wir definieren für beliebige $d \in \mathbb{N}$

$$V_d := \{f \in K[x] \mid \deg(f) \leq d\}\,,$$

wobei $\deg(f)$ der Grad von f ist. V_d ist der Raum aller Polynome f mit $\deg(f) \leq d$. Zeigen Sie, dass V_d für jedes $d \in \mathbb{N}$ ausgestattet mit der üblichen Addition und skalaren Multiplikation von Polynomen ein K-Vektorraum ist.

(b) Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Weiterhin seien $U, W \subset V$ Untervektorräume von V. Zeigen Sie:

$$U \cup W \text{ ist ein Untervektorraum von } V \iff U \subset W \text{ oder } W \subset U$$