TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. M. Schulze und R. Epure — Sommersemester 2018

Grundlagen der Mathematik I
Blatt 9

Abgabetermin: Montag, 18.06.2018, 10:00 Uhr

Aufgabe 35. Berechnen Sie folgende Grenzwerte, sofern sie existieren:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x\cos(x)}{x\sin(x)+\cos(x)-1}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right)$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\tan(x)}$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

Aufgabe 36. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

wobei $p_n(z)$ ein Polynom ist, welches vom Grad der Ableitung abhängt.

(b) Untersuchen Sie, ob die Taylor-Reihe von f an der Stelle $x_0 = 0$ gegen f konvergiert.

Bemerkung:
$p\left(\frac{1}{x}\right)$ ist so zu verstehen, dass $\frac{1}{x}$ in ein Polynom eingesetzt wird, bspw.

$$p(z) = z^2 + 1 \implies p\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} + 1.$$

Aufgabe 37. Seien $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_{>0}$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ fest. Wir definieren die Abbildung $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$m(p) := \sqrt[p]{\frac{x_1^p + \ldots + x_n^p}{n}}, \text{ falls } p \neq 0 \text{ und } m(0) := \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

(a) Zeigen Sie, dass m in $p = 0$ stetig ist, d.h.:

$$\lim_{p\to 0} m(p) = \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

(b) Zeigen Sie, dass m monoton wachsend ist.

(c) Sei $M := \{\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)\cdot\sin(\gamma) \mid \alpha,\beta,\gamma \in (0,\pi) \text{ mit } \alpha+\beta+\gamma = \pi\} \subset \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie $\sup(M)$.

Hinweis zu (b): Sie dürfen (ohne Beweis) verwenden, dass für $y_1, \dots, y_n > 0$ gilt:

$$\frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \cdot \log\left(\frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^n y_i \log(y_i)}{n}.$$

Hinweis zu (c): Verwenden Sie die Jensensche Ungleichung von Blatt 8!

Aufgabe 38. Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei beschränkte Funktionen, Z eine Zerlegung von $[a, b]$ und $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{OS}(f + g, Z) \leq \mathrm{OS}(f, Z) + \mathrm{OS}(g, Z)$,

(b) $\mathrm{OS}(cf, Z) = c\,\mathrm{OS}(f, Z)$,

(c) $\mathrm{OS}(|f|, Z) - \mathrm{US}(|f|, Z) \leq \mathrm{OS}(f, Z) - \mathrm{US}(f, Z)$.