Prof. Dr. M. Schulze und R. Epure | Sommersemester 2018

Grundlagen der Mathematik I
Blatt 8

Abgabetermin: Montag, 11.06.2018, 10:00 Uhr

Aufgabe 31. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Untersuchen Sie, für welche $n \in \{0, 1, 2\}$ die Funktion f stetig bzw. differenzierbar in $x_0 = 0$ ist.

Aufgabe 32. Wir definieren den *Sinus Hyperbolicus* $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und den *Kosinus Hyperbolicus* $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Mit $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dem *Area Sinus Hyperbolicus*, bzw. $\operatorname{arcosh} : [1, \infty) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, dem *Area Kosinus Hyperbolicus*, bezeichnen wir die entsprechenden Umkehrfunktionen. Zeigen Sie folgende Identitäten:

(a) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\cosh(y) \pm \sinh(y)\cosh(x)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

(c) $\operatorname{arsinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ für alle $x \in \mathbb{R}$, *ohne* die Verkettung zu verwenden.

(d) $2 \cdot \operatorname{arcosh}(x) = \operatorname{arcosh}(2x^2 - 1)$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 1}$.

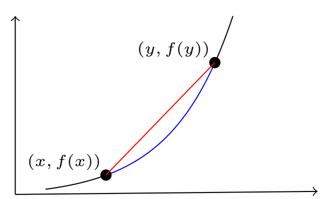
Hinweis zu (c) und (d): Verwenden Sie Aufgabe 33.

Aufgabe 33. Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig und seien $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ stetige und auf (a, ∞) differenzierbare Funktionen mit $f(a) = g(a)$ und $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in (a, \infty)$. Zeigen Sie, dass dann $f(x) = g(x)$ für alle $x \in [a, \infty)$ gilt.

Aufgabe 34.
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **konvex**, falls für alle $x, y \in [a, b]$ mit $x \leq y$ und für alle $\lambda \in [0, 1]$ die Ungleichung

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

gilt. Anschaulich gesprochen ist eine Funktion konvex, wenn der Graph von f komplett auf oder unterhalb der Verbindungsgeraden von $(x, f(x))$ und $(y, f(y))$ liegt (siehe Abbildung).



Visualisierung von $(1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$ und $f((1-\lambda)x + \lambda y)$ für $\lambda \in [0, 1]$.

Ziel dieser Aufgabe ist es, ein einfaches Kriterium kennenzulernen, um eine Funktion auf Konvexität zu überprüfen. Hierzu nehmen wir an, dass $f \in C^2((a, b))$. Zeigen Sie:

(a) Für feste $x, y \in [a, b]$ mit $x < y$ und $\lambda \in (0, 1)$ existieren $\xi, \zeta \in \mathbb{R}$ mit

$$x < \xi < (1-\lambda)x + \lambda y < \zeta < y$$

und

$$(1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) - f((1-\lambda)x + \lambda y) = (1-\lambda)\lambda(y - x)(f'(\zeta) - f'(\xi)).$$

(b) f ist genau dann konvex, wenn $f''(t) \geq 0$ für alle $t \in (a, b)$.

Mit den Ideen aus Aufgabe 34 kann man folgende Verallgemeinerung zeigen, welche Sie ab jetzt, ohne diese beweisen zu müssen, verwenden dürfen:

Satz (Jensensche Ungleichung). Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Weiterhin sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$, sowie $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Dann gilt:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn f eine lineare Funktion ist oder wenn $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Bemerkung. Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine **konkave** Funktion, d.h. ist $-f$ konvex, so gilt mit den Bezeichnungen von eben die Ungleichung

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Auch in diesem Fall herrscht Gleichheit genau dann, wenn f eine lineare Funktion ist oder wenn $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

π-jama-Party

am 14.06.18
ab 19:00
im Kramladen

mit Grill, Met und vielem mehr

Freut euch auf eine Live-Band ab
20:30 und episches Männerballett ab 24:00