Prof. Dr. M. Schulze und R. Epure — Sommersemester 2018

Grundlagen der Mathematik I
Blatt 7

Abgabetermin: Montag, 04.06.2018, 10:00 Uhr

Aufgabe 27.

(a) Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir definieren die Funktionen $f_+, f_- : D \to \mathbb{R}$ durch:

$$f_+(x) := \max\left(f(x), 0\right) \text{ für alle } x \in D,$$
$$f_-(x) := \max\left(-f(x), 0\right) \text{ für alle } x \in D.$$

Zeigen Sie:

i) $f = f_+ - f_-$ und $|f| = f_+ + f_-$.

ii) f ist genau dann stetig, wenn f_+ und f_- stetig sind.

(b) Zeigen Sie, dass $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$ gleichmäßig stetig ist.

Hinweis zu (b): Betrachten Sie g zunächst auf dem Intervall $[0, 1]$ und dann auf dem Intervall $[1, \infty)$.

Aufgabe 28.

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|,$$

für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq y$ und ein $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeigen Sie, dass f dann gleichmäßig stetig ist.

(b) Sei $c \in \mathbb{R}$ fest und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = c$. Zeigen Sie, dass g beschränkt ist.

Aufgabe 29. Seien im folgenden $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge, wobei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$.

(a) Wir definieren für eine reelle Funktion

$$\|f\|_\infty := \sup(\{|f(x)| : x \in D\}) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}.$$

Zeigen Sie, dass f_n genau dann gleichmäßig gegen f konvergiert, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass

$$f_n : [c, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{1 + nx^2}$$

für alle $c \in \mathbb{R}_{>0}$ gleichmäßig konvergent ist. Gilt dies auch für $c = 0$?

Aufgabe 30. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Weiterhin sei $f : [a, b] \to [a, b]$ eine Abbildung mit

$$|f(x) - f(y)| < L \cdot |x - y|,$$

für ein $L \in (0, 1)$ und für alle $x, y \in [a, b]$ mit $x \neq y$. Sei $x_0 \in [a, b]$ beliebig. Wir definieren die Folge $x_{n+1} = f(x_n)$ für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass $|x_{n+1} - x_n| < L^n |x_1 - x_0|$, falls $x_1 \neq x_0$ und $n \geq 1$.

(b) Zeigen Sie, dass (x_n) unabhängig von der Wahl von x_0 konvergiert.

(c) Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt besitzt, d.h. es gibt ein $\bar{x} \in [a, b]$ mit $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

(d) Ist der Fixpunkt in (c) eindeutig bestimmt? Beweisen Sie ihre Vermutung.

Hinweis zu (b): Zeigen Sie, dass (x_n) eine Cauchy-Folge ist.

Wir laden alle Studierenden zum kommenden **Tag der Mathematik** am 9. Juni 2018 ein. Neben spannenden Mathematikvorträgen berichten auch 4 Absolventen/innen unseres Fachbereichs über ihren beruflichen Werdegang. Weitere Informationen finden sich unter: `http://www.mathematik.uni-kl.de/tdm`