Prof. Dr. M. Schulze und R. Epure Sommersemester 2018

Grundlagen der Mathematik I
Blatt 5

Abgabetermin: **Dienstag**, 22.05.2018, 10:00 Uhr

Aufgabe 19. Untersuchen Sie für $n \in \mathbb{N}$ die folgenden Zahlenfolgen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert :

(a) $a_n = \frac{4n^3 - n^2 + 6}{6n^3 + 2n^2 + 1}$.

(b) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

(c) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2^k n + 2n^2 + k}{2^{k+1} n^2 + 2^k k}$.

(d) Die Folge definiert durch $a_0 = a, a_1 = b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

Hinweis zu (d): Finden Sie einen expliziten Ausdruck für $a_{k+1} - a_k$ und betrachten Sie die Summe $\sum\limits_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k)$.

Aufgabe 20.

(a) Sei (a_n) eine Folge positiver reeller Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \geq 0$. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}.$$

(b) Sei $a_n := \sqrt{n}, n \in \mathbb{N}$, eine Folge reeller Zahlen.

i) Zeigen Sie, dass (a_n) keine Cauchy-Folge ist.

ii) Zeigen Sie, dass dennoch

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall k \in \mathbb{N} \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : |a_n - a_{n+k}| < \varepsilon.$$

Was ist der Unterschied zu Definition 6.31?

Aufgabe 21.

(a) Berechnen Sie $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{(-5)^n + 3^n}{5^n + 2^n}$.

(b) Zeigen Sie, dass für jede beschränkte reelle Folge (a_n) gilt :

$$\liminf_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup_{n\to\infty} a_n.$$

(c) Zeigen Sie, dass für je zwei beschränkte reelle Folgen gilt:

$$\liminf a_n + \limsup b_n \leq \limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n.$$

Geben Sie jeweils ein Beispiel an, in welchem die Ungleichung strikt ist.

Hinweis: Aufgabe 12 könnte hilfreich sein.

- Bitte wenden -

Aufgabe 22. In dieser Aufgabe wollen wir beweisen, dass jede nicht-negative reelle Zahl c für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$ eine eindeutige k-te Wurzel besitzt. Wir definieren dazu für ein gegebenes c und $k \in \mathbb{N}_{>0}$ rekursiv die Folge (a_n) durch

$$a_0 := 1 \text{ und } a_{n+1} := a_n \cdot \left(1 + \frac{c - a_n^k}{k a_n^k}\right) \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $a_{n+1}^k \geq c$.

(b) Die Folge (a_n) ist ab dem zweiten Folgenglied monoton fallend.

(c) Zu jeder Zahl $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt es ein eindeutiges $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $a^k = c$. Wir nennen dieses a die **k-te Wurzel aus** c und schreiben sie als $\sqrt[k]{c}$.