Prof. Dr. M. Schulze und R. Epure Sommersemester 2018

Grundlagen der Mathematik I
Blatt 3

Abgabetermin: Montag, 07.05.2018, 10:00

Aufgabe 11. Bestimmen Sie Maximum, Minimum, Supremum und Infimum folgender Mengen, sofern diese existieren:

(a) $M := \left\{ \frac{x^2}{5+x^2} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}$,

(b) $N := \left\{ \frac{4}{2-x} \mid x \in (0,2) \right\} \subset \mathbb{R}$.

Beweisen Sie Ihre Behauptung!

Aufgabe 12. Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nicht-leere nach unten beschränkte Mengen. Wir definieren $A+B := \{a+b \mid a \in A,\ b \in B\}$ und $-A := \{-a \mid a \in A\}$. Beweisen Sie:

(a) $\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$.

(b) $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$.

(c) $-\inf(A) = \sup(-A)$.

Aufgabe 13. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion vom Grad $d \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass es eine Polynomfunktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ von kleinerem Grad (oder die Nullfunktion) und ein $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt, so dass

$$f(n) = c \cdot \binom{n+d}{d} + g(n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Summenfunktion $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto \sum_{k=0}^{n} f(k)$ eine Polynomfunktion vom Grad $d+1$ ist.

(c) Wie lautet der Leitkoeffizient von $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto \sum_{k=0}^{n} k^7$?

Hinweis zu (b): Verwenden Sie Aufgabe 8.

Aufgabe 14.

(a) Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}_{>0}$:

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$$

Hinweis: Der binomische Lehrsatz könnte hilfreich sein.

(b) Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt die folgende Ungleichung:

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n \leq n! \leq \left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

Beweisen Sie ihre Behauptung!