TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. M. Schulze und R. Epure Sommersemester 2018

Grundlagen der Mathematik I
Blatt 2

Abgabetermin: Montag, 30.04.2018, 10:00 Uhr

Aufgabe 7.

(a) Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$ mittels vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Seien weiterhin M, N endliche Mengen mit $|M| = |N| = n$. Zeigen Sie, dass es genau $n!$ bijektive Abbildungen $f : M \to N$ gibt.

Aufgabe 8. Seien $k, m, n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Für alle $k \leq n$ gilt

$$\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

(b) Für alle $k \leq m+n$ gilt

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot \binom{m}{k-j}.$$

Hinweis zu (b): Betrachten Sie $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m \cdot (1+x)^n$ und beachten Sie, dass $\binom{n}{k} = 0$, wenn $k < 0$ oder $k > n$.

Aufgabe 9. Betrachten Sie auf $\mathbb{Z}$ die Relation $x \sim y :\iff \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 3k$.

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Auf $\mathbb{Z}/\sim$ sei die Addition durch $\overline{x} + \overline{y} := \overline{x+y}$ und die Multiplikation durch $\overline{x} \cdot \overline{y} := \overline{x \cdot y}$. Zeigen Sie, dass diese Operationen wohldefiniert sind.

(c) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}/\sim, +, \cdot)$ mit den obigen Operationen ein Körper ist, indem Sie die Additions- und Multiplikationstafel angeben.

Aufgabe 10. Seien M und N nicht-leere Mengen und $f : N \to M$ eine surjektive Abbildung. Betrachten Sie auf N die Relation $x \sim y :\iff f(x) = f(y)$. Zeigen Sie:

(a) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

(b) $g : N/\sim \longrightarrow M,\ \overline{x} \mapsto f(x)$ ist eine wohldefinierte, bijektive Abbildung.

(c) Ist N abzählbar, so ist auch M abzählbar.