Technische Universität Kaiserslautern

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Dipl.-Phys. Philipp Korell
Fachbereich Mathematik

Mathematik für Informatiker: Kombinatorik und Analysis

Sommersemester 2017 - Übungsblatt 11

Abgabetermin: 6.7.2017, 11:30h

Aufgabe 1. Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^5}$,

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{\sin^2(x)}$,

(c) $\lim_{x\to\infty} \frac{x(x+1)e^x}{(e^x-1)^2}$.

(d) $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{1-\cos(x)} - \frac{1}{x^2})$,

Aufgabe 2. Sei $f\colon \mathbb{R}\setminus\{-2,2\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x^4}{x^2-4}$.

(a) Bestimmen Sie alle Nullstellen und Extrema von f.

(b) Bestimmen Sie $\lim_{x\to -2^-} f(x)$, $\lim_{x\to -2^+} f(x)$, $\lim_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ sowie $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to -\infty} f(x)$.

(c) Skizzieren Sie den Graphen von f.

Aufgabe 3. Berechnen Sie $\cos(\frac{1}{2})$ mit Hilfe des Satzes von Taylor

(a) mit einer Genauigkeit von $\pm 0,0001$ sowie

(b) bis zur fünften Nachkommastelle genau.

Nehmen Sie dabei an, dass $\cos(\frac{1}{2})$ nicht bekannt ist. Beweisen Sie, dass die ermittelten Werte tatsächlich den jeweiligen Anforderungen entsprechen.

Aufgabe 4. Sei

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x \leq 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gibt es eine Polynomfunktion $p_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x > 0$

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{x^{3\cdot 2^{n-1}}} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

(b) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k} = 0.$$

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f^{(n)}(x) = 0$ für $x \leq 0$.