

Mathematik für Informatiker: Kombinatorik und Analysis

Sommersemester 2017 - Übungsblatt 9

Abgabetermin: 22.6.2017, 11:30h

Aufgabe 1.

(a) Bestimmen Sie alle Werte $a \in \mathbb{R}$, für die die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$
$$x \mapsto \begin{cases} 8a + 16x, & \text{falls } x < 2, \\ a^2(x + 2), & \text{falls } x \geq 2 \end{cases}$$

stetig in 2 ist.

(b) Überprüfen Sie, ob sich die Funktion

$$f: \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\} \rightarrow \mathbb{R},$$
$$x \mapsto \frac{3x^3 - 3x^2 - 2x + 2}{(x - 1)(x + 2)}$$

in -2 und 1 stetig fortsetzen lässt.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie, an welchen Stellen die folgenden Funktionen jeweils (links-/rechtsseitig) stetig sind:

(a)

$$f_1: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R},$$
$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{falls } x < -3, \\ \frac{1}{x}, & \text{falls } -3 \leq x < 1, \\ 3 - 2e^{x-1}, & \text{falls } 1 \leq x. \end{cases}$$

(b)

$$f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$
$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{(x-2)^2}, & \text{falls } x < 2, \\ 0, & \text{falls } x = 2, \\ \frac{4}{(x-2)^2}, & \text{falls } 2 < x \leq 3, \\ [x], & \text{falls } 3 < x. \end{cases}$$

Aufgabe 3. (a) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig*, falls es ein $L > 0$ gibt, sodass $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$ für alle $x_1, x_2 \in D$. Zeigen Sie, dass eine Lipschitz-stetige Funktion gleichmäßig stetig ist.

(b) Bestimmen Sie $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ für die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$
$$x \mapsto 2x^3 - 5x^2 - x + 4.$$

Nutzen Sie dabei nicht Lemma 5.14(c).

Aufgabe 4. Sei $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeigen Sie, dass es genau ein $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt, sodass $x^2 = a$.

Hinweis: Nutzen Sie entweder Intervallschachtelung oder die Vollständigkeit von \mathbb{R} .