TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Dipl.-Phys. Philipp Korell
Fachbereich Mathematik

Mathematik für Informatiker: Kombinatorik und Analysis

Sommersemester 2017 - Übungsblatt 8

Abgabetermin: **14.6.2017, 15:15h**

Aufgabe 1. Bestimmen Sie den Konvergenzbereich folgender Potenzreihen:

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2k!}$,

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} k^n x^k$ für ein $n \in \mathbb{N}$,

(c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!(x-1)^k}{(2k)^k}$,

(d) $\sum_{k=0}^{\infty} k^k x^k$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

(a) ln ist streng monoton steigend.

(b) Für alle $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

(c) Für $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $a^{x+y} = a^x a^y$.

(d) Für $a \in \mathbb{R}_{>0}$ ist $\exp_a \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ bijektiv und streng monoton steigend (bzw. fallend) für $a > 1$ (bzw. $a < 1$) mit Umkehrfunktion $\log_a \colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Menge aller Berührungspunkte folgender Teilmengen von $\mathbb{R}$:

(a) $M_1 = \mathbb{N}$,

(b) $M_2 = \mathbb{Q}$ (*Hinweis*: Nutzen Sie Aufgabe 4, um zu zeigen, dass die gesuchte Menge $\overline{\mathbb{R}}$ ist),

(c) $M_3 = \mathbb{R} \setminus [1, \infty)$,

(d) $M_4 = \{(-1)^n + (\frac{-1}{n})^{n+1} \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

Aufgabe 4. Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Zeigen Sie, dass a genau dann ein Berührungspunkt von D ist, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $x_\epsilon \in D$ gibt, sodass $|x_\epsilon - a| < \epsilon$.