

Mathematik für Informatiker: Kombinatorik und Analysis

Sommersemester 2017 - Übungsblatt 4

Abgabetermin: 18.5.2017, 11:30h

Aufgabe 1. Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^n 2k = n(n+1).$$

(b) Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist $3^{n+1} - 3$ durch 6 teilbar.

Aufgabe 2. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten Sie die Äquivalenzrelation \sim_n , die auf \mathbb{Z} gegeben ist durch $x \sim_n y \Leftrightarrow n \mid x - y$. Untersuchen Sie, ob folgende Abbildungen wohldefiniert sind:

(a) $f_1: \mathbb{Z}/\sim_3 \rightarrow \mathbb{Z}/\sim_6, \bar{x} \mapsto \bar{x}$,

(b) $f_2: \mathbb{Z}/\sim_3 \rightarrow \mathbb{Z}/\sim_6, \bar{x} \mapsto \overline{2x - 5}$,

(c) $f_3: \mathbb{Z}/\sim_6 \rightarrow \mathbb{Z}/\sim_3, \bar{x} \mapsto \bar{x}$.

Aufgabe 3.

(a) Auf einer Karte seien sieben Orte O_1, \dots, O_7 gegeben. Verschiedene Straßen verbinden je zwei Orte. Für jeden Ort O_i sei die Anzahl $s(O_i)$ der Straßen, deren Start- oder Endpunkt er ist, durch folgende Tabelle gegeben:

i	1	2	3	4	5	6	7
$s(O_i)$	3	5	3	6	4	2	1.

Bestimmen Sie die Anzahl der Straßen auf der Karte.

(b) Gegeben sei in einer Ebene ein Dreieck sowie eine Gerade, die keine Ecke des Dreiecks enthalte. Zeigen Sie mit Hilfe des Schubfachprinzips, dass die Gerade nicht alle Seiten des Dreiecks schneidet.

Aufgabe 4. Wir verteilen sieben nummerierte Münzen auf einem 8×8 -Schachbrett. Geben Sie die Anzahl der Möglichkeiten folgender Konfigurationen an:

(a) Drei Münzen liegen auf weißen Feldern und vier liegen auf schwarzen Feldern, wobei kein Feld mehrfach belegt sein darf.

(b) Die ersten fünf Münzen liegen auf weißen Feldern und die beiden letzten liegen auf schwarzen Feldern, wobei kein Feld mehrfach belegt sein darf.

(c) Drei Münzen liegen in einer Reihe und zwei liegen in einer anderen. Die übrigen Münzen werden beliebig verteilt und die Felder dürfen mehrfach belegt sein.

(d) Die ersten drei Münzen liegen in einer Reihe und die letzte liegt in einer anderen Reihe. Die übrigen Münzen werden beliebig verteilt und die Felder dürfen mehrfach belegt sein.