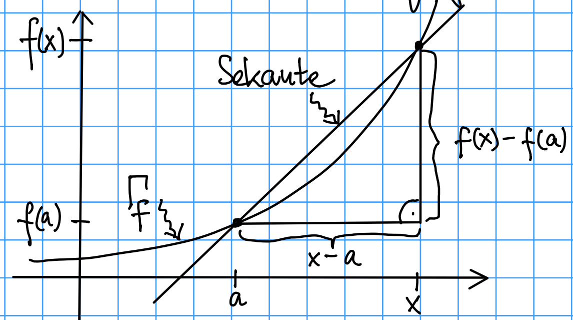
7. Ableitung

Def. 7.1 Sei $\mathbb{R} \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $a, x \in D$ mit $x \neq a$. Die eindeutige Gerade durch $(a, f(a))$, $(x, f(x)) \in \Gamma_f$ nennt man eine Sekante. Ihre Steigung ist durch den Differenzenquotienten $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ gegeben.

Veranschaulichung:



Um die Steigung von Γ_f selbst in $(a, f(a))$ zu definieren betrachtet man den Grenzwert für $x \to a$ von Steigungen solcher Sekanten.

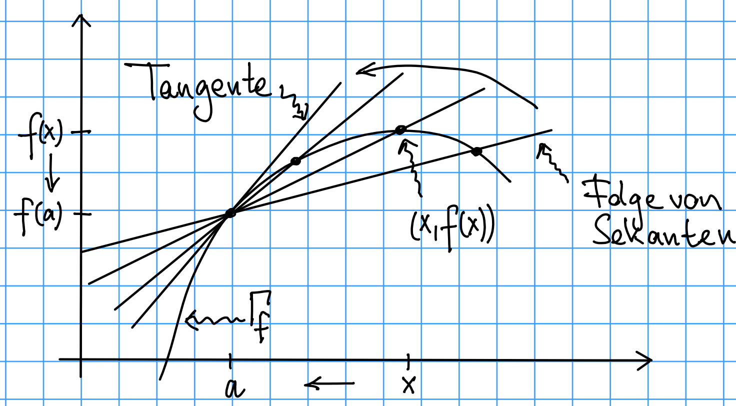
Def. 7.2 (Ableitung) Sei $\mathbb{R} \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ reelle Funktion.

(a) f heißt differenzierbar in $a \in D$ falls $f'(a) := \dfrac{df}{dx}(a) := \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$.
Man nennt dann $f'(a)$ die Ableitung von f in a und die Gerade durch $(a, f(a))$ mit Steigung $f'(a)$ die Tangente an Γ_f in $(a, f(a))$.

(b) f heißt differenzierbar falls $\forall a \in D$: f differenzierbar in a.

(c) Die Ableitung von f ist die Funktion
$\mathbb{R} \supseteq \{a \in D \mid f \text{ diff. bar. in } a\} \xrightarrow{f'} \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$.

Veranschaulichung



Bem. 7.3

(a) $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ da $x \to a \Leftrightarrow h := x-a \to 0$.

(b) Für $f(x) = c$, $c\in\mathbb{R}$, ist $f'(x) = 0$.

(c) $f'(a) \in \mathbb{R} \Rightarrow a$ Häufungspunkt von D.

(d) Differenzierbarkeit ist lokale Eigenschaft (vgl. Bem. 6.3(a)).

(e) Gleichung der Tangenten ist $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.

Lem. 7.4 Sei $\mathbb{R} \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ und $a \in D$. Dann gilt $\forall c \in \mathbb{R}$:

$f'(a) = c \Leftrightarrow$ (i) a Häufungspunkt von D $\wedge$ $\exists r: D \to \mathbb{R}$:

(ii) $f(x) = f(a) + c\cdot(x-a) + r(x)(x-a)$ $\wedge$

(iii) $\lim\limits_{x\to a} r(x) = 0$.

Beweis

$(\Rightarrow)$ Setze $r(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - c, & \text{falls } x \neq a, \\ 0, & \text{falls } x = a. \end{cases}$

Dann gilt (i) nach Bem. 7.3(a), (ii) nach Def. und (iii) nach Voraussetzung.

$(\Leftarrow)$ $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \overset{(i)}{\underset{(ii)}{=}} \lim\limits_{x\to a}(c + r(x)) = c + \lim\limits_{x\to a} r(x) \overset{(iii)}{=} c$ $\square$.

Bsp. 7.5 Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$, und $a \in \mathbb{R}$.

Nach Lem. I.5.3 gilt für $x \neq 0$ und dann wegen Stetigkeit auch für $x = 0$:

$$f(x) - f(a) = x^n - a^n = x^n\left(1 - \left(\tfrac{a}{x}\right)^n\right) = x^n\left(1 - \left(\tfrac{a}{x}\right)\right)\sum_{i=0}^{n-1}\left(\tfrac{a}{x}\right)^i$$
$$= (x-a)\underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} a^i x^{n-1-i}}_{=: p(x) \text{ Poly.fkt.}} = (x-a)\,p(a) + (x-a)\underbrace{(p(x) - p(a))}_{=: r(x) \text{ Poly.fkt}}$$

$\overset{5.12}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to a} r(x) = r(a) = 0$

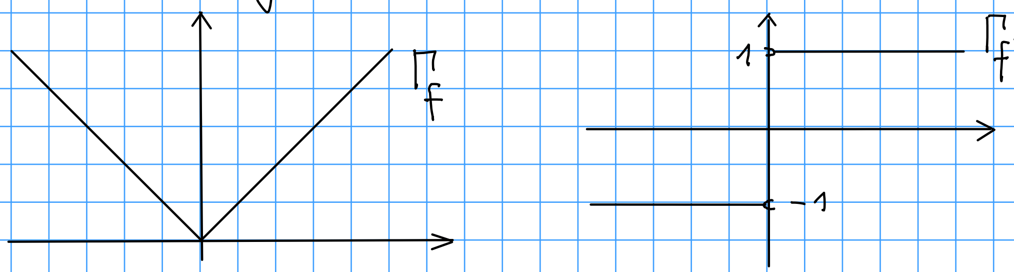
Mit Lem. 7.4 folgt $f'(a) = p(a) = n\cdot a^{n-1}$ und somit

$f': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto n\cdot x^{n-1}$, auch für $n = 0$ wo $f(x) = 1$ (siehe Bem. 7.3(b)).

Satz 7.6 Differenzierbare Funktionen sind stetig. 19.6.2017

Beweis: Folgt aus Lem. 7.4. $\square$

Bsp. 7.7 Für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$, ist $f': \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{|x|}$. (Übung).
Zwar ist f stetig, jedoch nicht diff.bar in $a = 0$, da
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = -1 \neq 1 = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} \quad \text{(siehe Lem. 5.17)}$$
Veranschaulichung:



Satz 7.8 $\exp' = \exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$.

Beweis: Wegen Satz 1.19 (vgl. Bem 2.2(b)) gilt:
$$\frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} - \exp(0) = \frac{1}{x}\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - 1\right) - 1 = \frac{1}{x}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!} - 1$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} = x \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+2)!}}_{\in \mathbb{R}} \to 0 \text{ für } x \to 0.$$
Es folgt
$$\frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} \overset{4.3}{=} \exp(x) \cdot \underbrace{\frac{\exp(h) - 1}{h}}_{\to 1} \to \exp(x) \text{ für } h \to 0. \quad \square$$

Allgemeiner gilt

Satz 7.9 Für $f: (a-\rho, a+\rho) \to \mathbb{R}$ def. durch Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$, ist $f': (a-\rho, a+\rho) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k (x-a)^{k-1}$,
ohne Intervallenden (vgl. Kor. 3.7) $\square$

d.h. man kann „Summandenweise ableiten" (vgl. Bsp. 7.5 und Satz 7.12(d)).

Bsp. 7.10

(a) $\exp'(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)$

(b) $\sin'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos(x)$ und analog
$\cos'(x) = -\sin(x)$ (Übung).

Satz 7.11 (Ableitungsregeln). Sind $\mathbb{R} \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \supseteq E \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ differenzierbar, so auch $f \pm g$, $f \cdot g$, f / g und $g \circ f$ (siehe Def. 6.4) und es gilt:

(a) $(f \pm g)' = f' \pm g'$

(b) $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ Produktregel

Inbesondere (siehe Bem. 7.3 (b)) $(c \cdot f + d \cdot g)' = c \cdot f' + d \cdot g'$ für $c, d \in \mathbb{R}$.

(c) $(f/g)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ Quotientenregel

(d) $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$ Kettenregel

Beweis: Wir zeigen (b) und (d), Rest Übung. Sei $a \in D$.

(b) $$(f \cdot g)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(f(x) - f(a)) \cdot g(x) + f(a)(g(x) - g(a))}{x - a}$$

$$\overset{5.10}{\underset{7.6.}{=}} \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \to a} g(x) + f(a) \cdot \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = f'(a) g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$
$$= (f' \cdot g + f \cdot g')(a)$$

(d) Sei $b := f(a) \in E$. Schreibe wie in Lem. 7.4.

$y = f(x) = f(a) + (f'(a) + r(x)) \cdot (x - a)$ mit $\lim_{x \to a} r(x) = 0$ und

$g(y) = g(b) + (g'(b) + s(y)) \cdot (y - b)$ mit $\lim_{y \to b} s(y) = 0$.

Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g(b) + (g'(b) + s(y)) \cdot (\cancel{f(a)} + (f'(a) + r(x)) \cdot (x - a) - \cancel{b}) \\ &= g(b) + \big(g'(b) \cdot f'(a) + \underbrace{g'(b) \cdot r(x) + s(y) \cdot (f'(a) + r(x))}_{=: t(x)}\big)(x - a) \\ &= g \circ f(a) + (((g' \circ f) \cdot f')(a) + t(x)) \cdot (x - a) \end{aligned}$$

mit $\lim_{x \to a} t(x) = 0$ nach Satz 5.10, da $x \to a \Rightarrow y = f(x) \to f(a) = b \Rightarrow s(y) \to 0$.

Mit Lem. 7.4 folgt $(g \circ f)'(a) = ((g' \circ f) \cdot f')(a)$. $\square$

Bsp. 7.12

(a) $f(x) = \underset{\underset{x^{-n}}{\parallel}}{\frac{1}{x^n}} \Rightarrow f'(x) \overset{7.13(c)}{=\!=} \frac{1' \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} \underset{7.5}{\overset{7.3(b)}{=\!=}} - \frac{n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}}$

$= -\frac{n}{x^{n+1}} = -n \cdot x^{-n-1}$ (vgl. Bsp. 7.5)

(b) Die Tangensfunktion $\tan := \frac{\sin}{\cos}$ hat die Ableitung

$$\tan' = \frac{\sin' \cdot \cos - \sin \cdot \cos'}{\cos^2} \overset{7.10(b)}{=\!=} \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} \overset{3.10(c)}{=\!=} \frac{1}{\cos^2}$$

(c) $(\sin^n)' = n \cdot \sin^{n-1} \cdot \cos$ wobei $\sin^n = \underbrace{\sin \cdot \ldots \cdot \sin}_{n \text{ mal}}$

Satz 7.13 (Ableitung der Umkehrfunktion)

Seien $\mathbb{R} \supseteq D \xrightarrow{f} E \subseteq \mathbb{R}$ bijektiv, a und $b = f(a)$ Häufungspunkte von D bzw. E, $0 \neq f'(a) \in \mathbb{R}$, f^{-1} stetig in b. Dann gilt $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(b)}$

Beweis: Schreibe wie in Lem. 7.4. mit $y := f(x)$

$$y - b = (f'(a) + r(x))(x - a) \quad \text{mit } \lim_{x \to a} r(x) = 0. \text{ Es folgt:}$$

(i) $\lim_{y \to b} r(x) = 0$, denn wegen Stetigkeit von f^{-1} in b gilt

$y \to b \Rightarrow x = f^{-1}(y) \to f^{-1}(b) = a \Rightarrow r(x) \to 0$.

(ii) $(f^{-1})'(b) = \lim_{y \to b} \frac{x - a}{y - b} = \lim_{y \to b} \frac{1}{f'(a) + r(x)} = \frac{1}{f'(a) + \lim_{y \to b} r(x)} \overset{(i)}{=} \frac{1}{f'(a)}$. $\square$

Bsp. 7.14 Nach Satz 7.13 gilt:

(a) $\ln'(x) = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}$ (siehe Satz 7.8 und Bsp. 6.8.(b))

(b) $\underset{\underset{(x^{\frac{1}{n}})'}{\parallel}}{\sqrt[n]{x}'} = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x}^{\,n-1}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(x^{1/n})^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n} - 1}$

(siehe Bsp. 7.5, 6.8.(c) und Kor. 4.11.(a))

Es gilt sogar $(x^r)' = r \cdot x^{r-1}$ für $r \in \mathbb{Q}$ (Übung).

Def. 7.15 Sei $\mathbb{R} \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$. Def. die <u>n-te Ableitung</u> $f^{(n)}$ von f rekursiv durch $f^{(0)} := f$ und $f^{(n)} := \left(f^{(n-1)}\right)'$. Falls $f^{(n)} : D \to \mathbb{R}$ (stetig) so heißt f <u>n mal (stetig) differenzierbar</u>. Man schreibt $C^n(D)$ für die Menge der n mal stetig diffbaren Funktionen und setzt $C^\infty(D) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C^n(D)$.

Bem 7.16

(a) $f \in C^0(D) \Leftrightarrow f : D \to \mathbb{R}$ stetig

(b) $f \in C^n(D) \Rightarrow f^{(n-1)} : D \to \mathbb{R}$ stetig (siehe Satz 7.6)

Bsp. 7.17

(a) $\mathbb{R} \supseteq D \xrightarrow{r} \mathbb{R}$ rational $\overset{7.11}{\Rightarrow}$ $D \xrightarrow{r'} \mathbb{R}$ rational (Übung). Somit $p \in C^\infty(D)$.

(b) $\exp^{(n)} = \exp$ (siehe Satz 7.8). Somit $\exp \in C^\infty(\mathbb{R})$

(c) $\sin, \cos \in C^\infty(\mathbb{R})$, denn es gilt (siehe Bsp. 7.10 (b)):

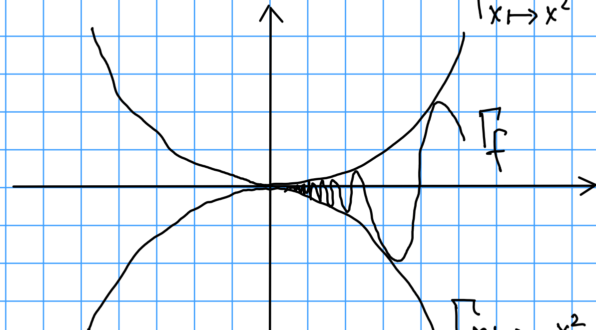
$$\sin^{(n)} = \begin{cases} \sin, & \text{falls } n \sim_4 0 \quad (\text{siehe Bsp. I.4.16}), \\ \cos, & \text{falls } n \sim_4 1, \\ -\sin, & \text{falls } n \sim_4 2, \\ -\cos, & \text{falls } n \sim_4 3, \end{cases} \qquad \cos^{(n)} = \ldots \quad (\text{Übung})$$

(d) $\ln'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \ln^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$ (siehe Satz 7.11 (c), Übung)
$\Rightarrow \ln \in C^\infty(\mathbb{R}_{>0})$.

(e) Def. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := \begin{cases} x^2 \cdot \sin(1/x), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$

Dann ist f diff.bar (sogar $f \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$) jedoch f' nicht stetig (Übung).

<u>Veranschaulichung</u>



8. Mittelwertsätze und Extrema

Def. 8.1 Sei $\mathbb{R} \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$.

(a) $a \in D$ heißt (globales) Minimum bzw. Maximum von f falls

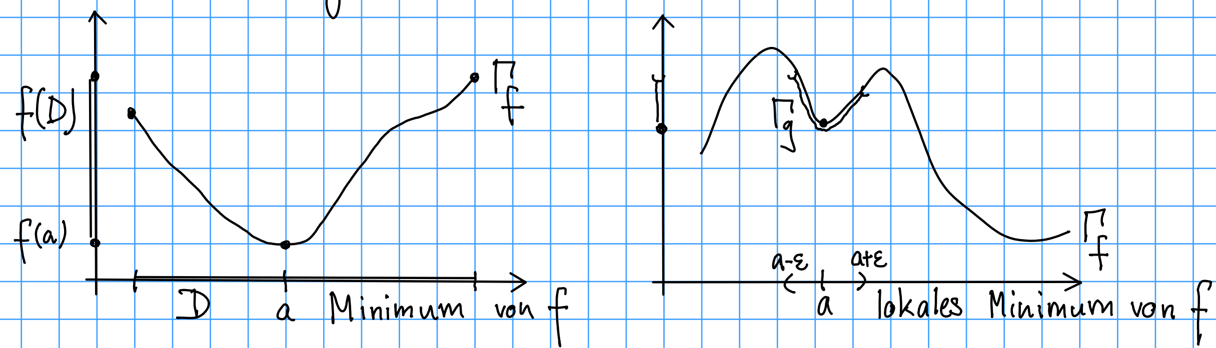
$f(a) = \min f(D)$ bzw. $f(a) = \max f(D)$ (vgl. Def. I.4.13)

(b) $a \in D$ heißt lokales Minimum bzw. Maximum von f falls

$\exists \varepsilon > 0$: a ist Min. bzw. Max von $f|_{(a-\varepsilon, a+\varepsilon)} =: g$.

Minima und Maxima nennt man Extrema.

Veranschaulichung:



Satz 8.2 Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.
Dann hat f ein Minimum und ein Maximum. □

Bem 8.3. Satz 8.2 gilt nicht für andere Typen von Intervallen, z.B. ist
$f: I := (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{x}$, stetig (siehe Bsp. 6.2.(a)) ohne Maximum.

Lem. 8.4 (Notwendiges Kriterium für Extrema)
Sei $\mathbb{R} \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ differenzierbar im lokalen Extremum $a \in D$, das ein Häufungspunkt von $D_{<a}$ und $D_{>a}$ ist. Dann ist $f'(a) = 0$.

Beweis: O.B.d.A sei a ein globales Maximum und
$\forall x \in D$: $f(x) \geq f(a) \Rightarrow f(x) - f(a) \geq 0$. Mit Satz 5.10 (d) und Lem. 5.17 folgt:

$$0 \leq \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0.$$ □

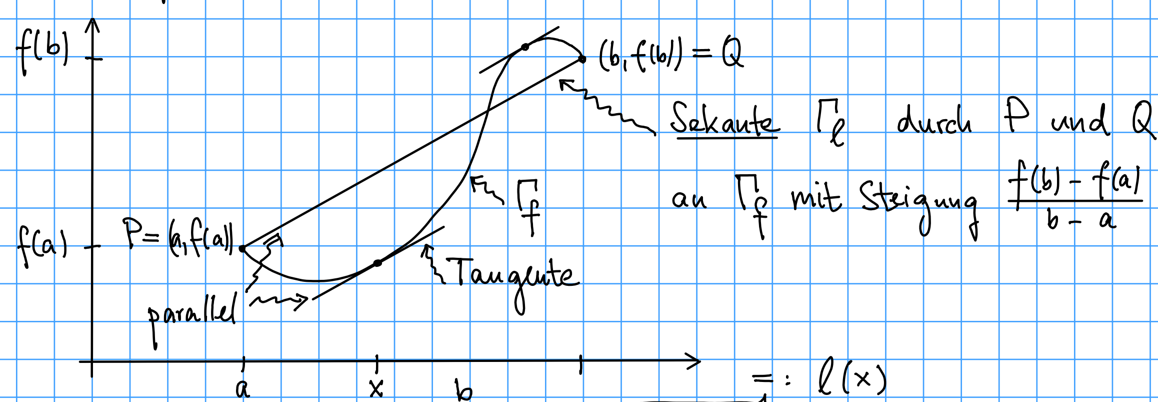
Bsp. 8.5 $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$, ist streng monoton steigend und somit ohne lok. Extrema mit $g'(0) = g''(0) = 0$. Umkehrung von Lem. 8.4 also falsch.

Hinreichende Kriterien für Extrema leiten sich aus Mittelwertsätzen ab.

Satz 8.6 (Mittelwertsatz der Differenzialrechnung) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I := [a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ stetig, $f|(a,b)$ differenzierbar. Dann $\exists\, x \in (a,b)$:

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Veranschaulichung:



Beweis: Betrachte $h: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) - \overbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)}^{=:\ \ell(x)}$.

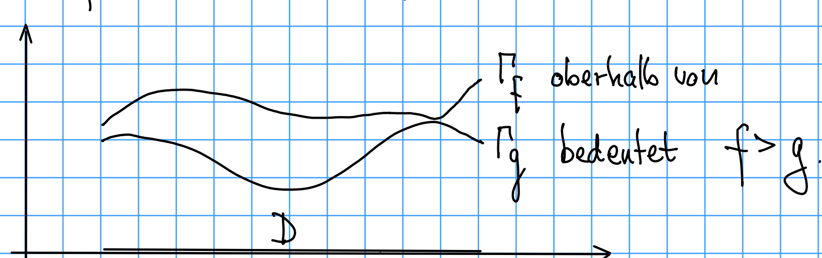
Nach Sätzen 5.10 und 7.11 erfüllt h die Voraussetzungen an f mit $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ und $h(a) = f(a) = h(b)$.

Falls $h = f(a)$ setze $x := \frac{a+b}{2}$. Andernfalls hat h nach Satz 8.2 ein Maximum $x \in [a,b]$ mit $h(x) > h(a)$ oder Minimum $x \in [a,b]$ mit $h(x) < h(a)$. Es folgt $h'(x) = 0$ nach Lem. 8.4 und $x \in (a,b)$. □

Def. 8.7 Für $\mathbb{R} \supseteq D \overset{f,g}{\rightrightarrows} \mathbb{R}$ setze $f \underset{\leq,}{\geq,} g \;:=\; \forall x \in D: f(x) \underset{\leq,}{\geq,} g(x)$.

Dadurch wird $\mathbb{R}^D$ ein poset (siehe Def. 4.6).

Veranschaulichung:



Kor. 8.8: (Monotoniekriterium) Sei $f: I \to \mathbb{R}$ wie in Satz 8.6. Auch $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ ist erlaubt wobei $I = (-\infty, \ldots$ bzw. $I = \ldots, \infty)$ falls $a = -\infty$ bzw. $b = \infty$.

(a) $f' \geq 0$ bzw. $f' \leq 0 \Leftrightarrow f$ monoton steigend bzw. fallend.

(b) $f' > 0$ bzw. $f' < 0 \Rightarrow f$ streng monoton steigend bzw. fallend (siehe Bsp. 8.5)

(c) $f' = 0 \Leftrightarrow f$ konstant.

Beweis: Für $u, v \in I$, $u < v$, erfüllt $f|[u,v]$ nach Satz 7.6 die Vor. von Satz 8.6. Also $\exists\, x \in (u,v)$: $f(v) - f(u) = f'(x)\underbrace{(v-u)}_{>0}$ und somit $f'(x) \substack{>\\<\\=} 0 \Leftrightarrow f(v) \substack{>\\<\\=} f(u)$.

Daraus folgen (b), (c) und (a)($\Rightarrow$).

(a)($\Leftarrow$) Falls $\exists\, x \in (a,b)$: $0 > f'(x) = \lim\limits_{w \to 0} \dfrac{f(w) - f(x)}{w - x}$ dann (siehe Satz 5.10.(d))

$\exists\, w \in (a,b)$: $\dfrac{f(w) - f(x)}{w - x} < 0$ und f ist nicht monoton steigend. □

Kor. 8.9: Erfüllen $g, h: I \longrightarrow \mathbb{R}$ die Vor. von Kor. 8.8, so gilt

$$g' = h' \Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}: \ g = h + c.$$

Beweis: Wende Kor. 8.8.(c) auf $f := g - h$ an (siehe Satz 7.11). □

Kor. 8.10. Unter Vor. von Kor. 8.8 sei $x \in (a,b)$ mit $f'|_{I<a} \underset{(\leq)}{\geq} 0$ und $f'|_{I>a} \underset{(\geq)}{\leq} 0$.

Dann ist x ein lokales Maximum (Minimum) von f.

Beweis: Nach Kor. 8.8.(a) sind $f|I_{\leq x}$ und $f|I_{\geq x}$ monoton steigend bzw. fallend. □

Satz 8.11 Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ zwei mal differenzierbar und $x \in (a,b)$ mit $f'(x) = 0$ und $f''(x) \underset{(>)}{<} 0$.

Dann ist x ein lokales Maximum (Minimum) von f.

Beweis: Nach Satz 7.6 ist f' stetig. Nach Kor. 6.5 ist dann auch

$$g: (a,b) \setminus \{x\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad w \longmapsto \frac{f'(w)}{x - w} = \frac{f'(w) - f'(x)}{w - x} \quad \text{stetig.}$$

Aus $\lim\limits_{w \to x} g(w) = f''(x) > 0$ folgt mit Lem. 5.7 $\exists\, \varepsilon > 0$: $g|(x-\varepsilon, x+\varepsilon) < 0$.

Nach Def. von g ist $f'|(x-\varepsilon, x) > 0$ und $f'|(x, x+\varepsilon) < 0$.

Kor. 8.10. liefert dann die Beh. □

Bem. 8.12 Satz 8.11 macht keine Aussage falls $f''(x)=0$ (siehe Bsp. 8.5).

Bsp. 8.13

(a) Seien $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax^2+bx+c$, Polynomfkt.
$p'(x) = 2ax+b$ hat eindeutige Nullstelle $x = -\frac{b}{2a}$. Wegen $p''(x) = 2a$ ist diese ein lokales Maximum (Minimum) falls $a \underset{(>)}{<} 0$.

(b) Betrachte $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^x = \exp(x \cdot \ln(x))$. Dann gilt
$f'(x) = x^x \cdot (\ln(x)+1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = 1/e$,
$f''(x) = x^x \cdot ((\ln(x)+1)^2 + \frac{1}{x}) \Rightarrow f''(1/e) = e^e \cdot e = e^{e+1} > 0$.
Somit ist $1/e$ ein lokales Minimum von f.
Übung: $1/e$ ist ein globales Minimum von f.

Satz 8.14 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz)
Seien $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, $f,g: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f|_{(a,b)}$ und $g|_{(a,b)}$ diff.bar. und $\forall x \in (a,b): g'(x) \neq 0$. Dann $\exists x \in (a,b)$:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(Satz 8.6 ist der Fall $g(x) = x$.)

Beweis: Betrachte $h: [a,b] \to \mathbb{R}$, $h(x) := f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(x)-g(a))$
mit $h(a) = f(a) = h(b)$. Nach Kor. 6.5 und Satz 7.11 erfüllt h die Vor. von Satz 8.6. Daher $\exists x \in (a,b)$: $0 = h'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(x)$. □

26.6.2017

Satz 8.15 (**Regeln von L'Hôpital**) Seien $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, $c \in \{a, b\}$.
$f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ diff.bar mit $\forall x \in (a,b) : g(x) \neq 0 \neq g'(x)$ und $\lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$.
Sei entweder (a) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to c} g(x)$ oder

(b) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ und $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \pm\infty$ (unabhängige Vorzeichen).

Dann gilt $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Beweis: Wir zeigen nur (a) im Fall $c = a \in \mathbb{R}$. Rest Übung.
Nach Vor. sind f und g durch $f(a) := 0 =: g(a)$ stetig fortsetzbar.
Nach Satz 8.14 $\forall w \in (a,b)\ \exists x \in (a,w) : \frac{f(w)}{g(w)} = \frac{f(w)-f(a)}{w-a} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
Da $w \to a \Rightarrow x \to a$, folgt die Beh. durch Anwenden von $\lim\limits_{w\to a}$ $\square$

Bsp. 8.16

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$ (siehe Bsp. 6.7(a)).
Alternativ berechnet man dies mit der Sinus-Reihe
(siehe Bsp. 3.10.(c), vgl. Beweis von Satz 7.8)

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos(x)} = \frac{e^0 + e^{-0}}{\cos(0)} = 2$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} (x \cdot \ln(x)) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{x^{-1}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = -\lim\limits_{x\to 0} x = 0$.

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \frac{1}{n} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^{n-1}} = \ldots = \frac{1}{n!} \cdot \lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$ (vgl. Lem. 5.14(a))

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[n]{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{-1}}{\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}} = n \cdot \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = 0$.

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1} - 1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2}{2x \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}} = 2 \cdot \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x^2+1} = 2$

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\text{—〃—} \right) = 2 \cdot \lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} \right) = \infty$.

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} \right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \ln(x+1)}{x \cdot \ln(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{x+1}}{\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{(x+1)\ln(x+1) + x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\ln(x+1) + \frac{x+1}{x+1} + 1} = \frac{1}{2}$

9. Taylorreihen

Def. 9.1 Sei $\mathbb{R} \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$.

(a) f heißt <u>analytisch in $a \in D$</u> falls
$$\exists \varepsilon > 0 : \exists (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) : \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k.$$

(b) f heißt <u>analytisch</u> falls $\forall a \in D$: f analytisch in a.

Lem. 9.2 In Def. 9.1.(a) gilt $\quad a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Beweis: Nach Satz 7.9 ist $f|(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \in C^{\infty}((a-\varepsilon, a+\varepsilon))$ mit
$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \underbrace{k(k-1)\cdots(k-n+1)}_{=(k)_n \text{ (siehe Def. II.2.1.(a))}} \cdot a_k (x-a)^{k-n} \underset{k \mapsto k+n}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (k+n)_n \cdot a_{k+n} (x-a)^k$$

$$\overset{3.3.(c)}{\Rightarrow} f^{(n)}(a) = (n)_n \cdot a_n = n! \cdot a_n.$$ □

Def. 9.3. Sei $\mathbb{R} \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ in $a \in D$ hinreichend diff.bar. Dann heißt

(a) $T_{f,a}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad$ <u>Taylorreihe</u>,

(b) $T_{f,a}^n(x) := \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad$ <u>n-tes Taylorpolynom</u> und

(c) $R_{f,a}^n(x) := f(x) - T_{f,a}^n(x) \quad$ <u>n-tes Restglied</u> von f in a.

Satz 9.4 Sei $\mathbb{R} \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ analytisch. Dann gilt:
$$\forall a \in D : \exists \varepsilon > 0 : \forall x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) : \quad f(x) = T_{f,a}(x).$$

Beweis: Folgt aus Lem. 9.2. □

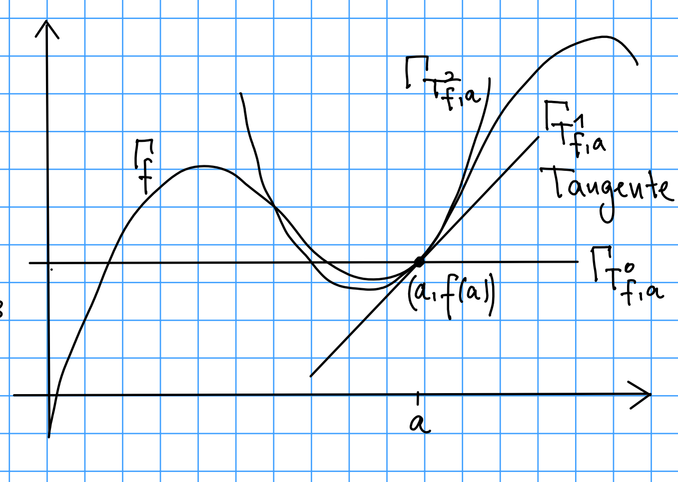
Bem 9.5

$T_{f,a}^0 = f(a)$

$T_{f,a}^1 = f(a) + f'(a)(x-a) \quad$ (siehe Bem. 7.3(e))

$T_{f,a}^2 = f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2} \cdot (x-a)^2$

$T_{f,a}^3 = f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2} \cdot (x-a)^2 + \dfrac{f'''(a)}{6} \cdot (x-a)^3$



Bsp. 9.6

(a) $\exp^{(n)}(0) = \exp(0) = 1$ (siehe Bsp. 7.10.(a)) $\Rightarrow T_{\exp,0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)$.
Somit ist exp analytisch in 0.

(b) Nach Bsp. 7.17.(c) ist $\forall k \in \mathbb{N}$:
$\sin^{(2k)}(0) = \pm \sin(0) = 0$ und $\sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \cdot \cos(0) = (-1)^k$ und somit

$T^{2n+1}_{\sin,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ und $T_{\sin,0}(x)$ die Sinusreihe.
Also ist sin (und analog cos) analytisch in 0.

(c) Def. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x \leq 0. \end{cases}$

Dann ist $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ (Übung).
Jedoch $f^{(n)}(0) = (f|_{\mathbb{R}_{\leq 0}})^{(n)}(0) = 0$ (siehe Lem. 5.17) und somit $T_{f,0}(x) = 0$.
Da $\forall \varepsilon > 0 : f|_{(-\varepsilon,\varepsilon)} \neq 0$ (siehe Kor. 4.5) ist nach Satz 9.4 f nicht analytisch.

(d) Es gibt $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ für die $T_{f,0}(x)$ Konvergenzradius 0 hat.

Satz 9.7 Durch Potenzreihen definierte Funktionen sind analytisch.

Bsp. 9.8 exp, sin, cos, tan, ... sind analytische Funktionen.
Auch $\ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ ist analytisch, jedoch nicht wegen Satz 9.7 (siehe Bem. 4.9).

Lem. 9.9 Sei $\mathbb{R} \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ in $w \in D$ $n+1$ mal diff.bar. Dann gilt:
$$\frac{d}{dw} T^n_{f,w}(x) = f^{(n+1)}(w) \cdot \frac{(x-w)^n}{n!}.$$

Beweis: $\frac{d}{dw} T^n_{f,w}(x)$

$$= \frac{d}{dw} \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(w) \frac{(x-w)^k}{k!} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} f^{(k+1)}(w) \frac{(x-w)^k}{k!}} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(w) \frac{(x-w)^{k-1}}{(k-1)!}}$$

$$\overset{k \mapsto k+1}{=} \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} f^{(k+1)}(w) \frac{(x-w)^k}{k!}}$$

$$= f^{(n+1)}(w) \frac{(x-w)^n}{n!}.$$

$\square$

Satz 9.10 (Satz von Taylor) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^n([a,b])$, $f|(a,b)$ $n+1$ mal diff.bar. Dann gilt: $\forall x \in (a,b] : \exists w \in (a,x)$:

$$R^n_{f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(w)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}.$$

Eine analoge Aussage gilt für b statt a als Entwicklungspunkt.

Beweis: Sei $x \in (a,b]$ und betrachte $g, h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ def. durch

$g(w) := f(x) - T^n_{f,w}(x)$ und $h(w) := -\frac{(x-w)^{n+1}}{(n+1)!}$. Nach Vor. an f ist g stetig

und $g|(a,b)$ diff.bar. und $h \in C^\infty([a,b])$ mit $\forall w \in (a,x) : h'(w) \neq 0$. Es gilt

$$g(a) = R^n_{f,a}(x), \qquad g(x) = 0, \quad g'(w) = -f^{(n+1)}(w) \cdot \frac{(x-w)^n}{n!} \quad \text{für } w \in (a,b),$$

$$h(a) = -\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad h(x) = 0 \quad \text{und} \quad h'(w) = \frac{(x-w)^n}{n!}.$$

Nach Satz 8.14 $\exists w \in (a,x)$:

$$-\frac{(n+1)!}{(x-a)^{n+1}} \cdot R^n_{f,a}(x) = \frac{g(x)-g(a)}{h(x)-h(a)} = \frac{g'(w)}{h'(w)} = -f^{(n+1)}(w). \qquad \square$$

Bsp. 9.11 $$\left|\sin(x) - T^{2n+1}_{\sin,0}(x)\right| = \left|R^{2n+1}_{\sin,0}(x)\right| = \underbrace{\left|\sin^{(2n+2)}(w)\right|}_{=|\sin(w)| \leq 1} \cdot \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

$T^{2n+1}_{\sin,0}(x)$ stimmt bis auf $\pm\varepsilon$ mit $\sin(x)$ überein falls $\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \leq \varepsilon$.

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ gibt es so ein $n \in \mathbb{N}$:

Da $\exp(|x|)$ konv. ist $\left(\frac{|x|^n}{n!}\right)$ eine Nullfolge (siehe Lem. 2.6).

Um aber eine vorgegebene Zahl korrekter Dezimalstellen zu garantieren, muss man die Folge $\left(T^{2n+1}_{\sin,0}(x)\right)_n$ berechnen, da eine beliebig kleine Änderung einer reellen Zahl $w \in \mathbb{R}$ einen Übertrag auf größere Dezimalstellen verursachen kann, z.B. $w = 0{,}99\ldots9900\ldots$