III Reelle Analysis

0. Reelle Zahlen

Wir benutzen ohne Konstruktion / Beweis Existenz und Eigenschaften der reellen Zahlen:

Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen mit den üblichen Verknüpfungen

Addition	und	Multiplikation	sowie	neutralen Elementen
$+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$		$\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$		$0, 1 \in \mathbb{R}$
$(x,y) \longmapsto x+y$		$(x,y) \longmapsto x\cdot y$	und	inversen Elementen
				$\forall x\in\mathbb{R}: \quad \exists -x \in \mathbb{R}$
				$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}: \exists\, x^{-1}\in\mathbb{R}$

ist ein Körper, d.h. $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$:

(i) $x+y = y+x$, $\quad x\cdot y = y\cdot x$ — Kommutativität

(ii) $x+(y+z) = (x+y)+z$, $\quad x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$ — Assoziativität

(iii) $x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$ — Distributivität

(iv) $x+0 = x$, $\quad x\cdot 1 = x$

(v) $x+(-x) = 0$, $\quad x\cdot x^{-1} = 1$ falls $x\neq 0$.

Man schreibt $xy := x\cdot y$, $x-y := x+(-y)$ und $\frac{x}{y} := xy^{-1} = y^{-1}x$.

Auf $\mathbb{R}$ gibt es eine Totalordnung $\leq$ mit (siehe Bsp. I.4.7.(a)) $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$:

(vi) $x\leq y \Rightarrow x+z\leq y+z$ und $x\leq y \wedge 0\leq z \Rightarrow xz\leq yz$.

Wegen (iv) und (v) gilt dies auch mit $<$ statt $\leq$. Es folgt $\forall x,y\in\mathbb{R}$:

$$x\geq y \Rightarrow -x\leq -y, \text{ denn } -x>-y \overset{+x+y}{\Longrightarrow} y>x, \text{ und}$$

$$x\geq y>0 \Rightarrow \frac{1}{x}\leq\frac{1}{y}, \text{ denn } \frac{1}{x}>\frac{1}{y} \overset{\cdot x\cdot y}{\Longrightarrow} y>x, \text{ und}$$

entsprechend mit $>$ und $<$ statt.

Zudem ist $\mathbb{R}$ mit $\leq$ vollständig (siehe Satz I.4.11).

Somit ist $\mathbb{R}$ ein vollständig geordneter Körper.

Wir benutzen obige Axiome im Folgenden ohne expliziten Hinweis.

Satz 0.1. $\mathbb{R}$ ist Archimedisch, d.h. $\forall x,y\in\mathbb{R}: x>y>0 \Rightarrow \exists n\in\mathbb{N}: n\cdot y\geq x$.

Insbesondere, $\forall x\in\mathbb{R}: \exists n\in\mathbb{N}: n\geq x$.

Beweis: Ang. $\exists x,y\in\mathbb{R}: x>y>0 \wedge \forall n\in\mathbb{N}: n\cdot y<x$. Dann ist x obere Schranke von $\emptyset\neq X:=\{n\cdot y \mid n\in\mathbb{N}\}\subseteq\mathbb{R}$ und nach Satz 4.11 $\exists z:=\sup_{\mathbb{R}}(M)$.

Da $w:=z-\frac{y}{2}<z$ und somit w keine obere Schranke von X. $\Rightarrow \exists n\in\mathbb{N}$:

$$X\ni n\cdot y>w \Rightarrow X\ni(n+1)y=n\cdot y+y>w+y=z-\frac{y}{2}+y=z+\frac{y}{2}>z. \lightning$$

Zweite Beh. folgt aus erster mit $y:=1$ falls $x>1$ und $n:=1$ sonst. □

Kor. und Def. 0.2 (Auf- und Abrunden) Für jedes $x\in\mathbb{R}$ existieren die Aufrundung $\lceil x\rceil:=\min\mathbb{Z}_{\geq x}$ und Abrundung $\lfloor x\rfloor:=\max\mathbb{Z}_{\leq x}$.

Beweis: Wir behaupten

$$\min\mathbb{Z}_{\geq x}=\begin{cases}\min\mathbb{N}_{\geq x}, & \text{falls } x\geq 0,\\ -\min\mathbb{N}_{>-x-1}, & \text{sonst},\end{cases}$$

und

$$\max\mathbb{Z}_{\leq x}=\begin{cases}\max\mathbb{N}_{\leq x}, & \text{falls } x\geq 0,\\ -\max\mathbb{N}_{<-x+1}, & \text{sonst}.\end{cases}$$

Nach Def. sind $\lceil x\rceil, \lfloor x\rfloor\in\mathbb{Z}$ eindeutig festgelegt durch

$$\lceil x\rceil \geq x > \lceil x\rceil-1 \quad\text{und}\quad \lfloor x\rfloor\leq x<\lfloor x\rfloor+1$$

Falls $x\geq 0$ folgen die behaupteten Gleichheiten.

Falls $x<0$ ist (siehe 0.(iv), (v)) $-x>0$ mit

$$-\lceil x\rceil\leq -x<-\lceil x\rceil+1 \quad\text{und}\quad -\lfloor x\rfloor\geq -x>-\lfloor x\rfloor-1$$

$$\Leftrightarrow -\lceil x\rceil-1\leq -x-1<-\lceil x\rceil \qquad \Leftrightarrow -\lfloor x\rfloor+1\geq -x+1>-\lfloor x\rfloor$$

Wieder folgen die behaupteten Gleichheiten. Nach Satz 1.8 gilt:

$$\mathbb{N}_{\geq x}, \mathbb{N}_{>-x-1}, \underbrace{\mathbb{N}_{\leq x}, \mathbb{N}_{<-x+1}}_{\text{endlich}}\neq\emptyset$$

Somit existieren $\lceil x\rceil$ und $\lfloor x\rfloor$ nach Bem. I.5.2.(d) bzw. I.4.12.(a). □

Kor. und Def. 0.3 Für $n\in\mathbb{N}$ (un)gerade ist $\mathbb{R}_{(\geq 0)}\to\mathbb{R}_{(\geq 0)}, x\mapsto x^n:=\overbrace{x\cdots x}^{n}$, bijektiv.

Die Umkehrabb. $x\mapsto\sqrt[n]{x}$ heißt n-te Wurzel. Man schreibt $\sqrt{x}:=\sqrt[2]{x}$. □

1. Folgen

Def. 1.1. Eine (reelle) Folge in einer Menge $M\,(=\mathbb{R})$ ist eine Abbildung
$(a_n) : \mathbb{N}_{\geq m} \longrightarrow M$, $n \longmapsto a_n$, wobei $m \in \mathbb{N}$.

Die Werte a_n heißen Folgenglieder und man schreibt die Folge auch als
$(a_n) =: (a_n)_n =: (a_n)_{n\geq m} =: a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$ bzw. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ falls $m=0$.
Wir schreiben $a_{\mathbb{N}_{\geq m}} := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}_{\geq m}\}$ für das Bild der Folge.

Bsp. 1.2

(a) $M \hookrightarrow M^{\mathbb{N}}$, $a \longmapsto (a)_n = a, a, a, \ldots$, d.h. $a \in M$ def. konstante Folge.

(b) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

(c) $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geq 1} = 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$

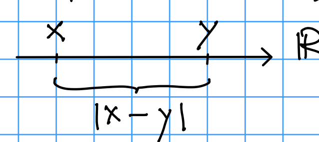
(d) Fibonacci-Zahlen: $a_0 := 0$, $a_1 := 1$, $\forall n \geq 2: a_n := a_{n-1} + a_{n-2}$.
$(a_n) = 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

(e) $a_0 := 1$, $a_{n+1} := \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \Rightarrow (a_n) \approx 1, 1.5, 1.416666, 1.414215, \ldots$
Vermutung: Folgenglieder nähern sich $\sqrt{2} \approx 1.414213562$
Wäre mit $a_1 = a$ die Folge konstant, so $a = \frac{a}{2} + \frac{1}{a} \Rightarrow a^2 = 2$.

Bem. 1.3. Endlich viele Folgenglieder legen eine Folge nicht fest, z.B.
$(a_n) = 1, 2, 3, 4, 5, \leadsto 6, 7, 8, \ldots$ d.h. „Pünktchennotation"
$\leadsto 7, \frac{3}{5}, \sqrt{2}, \ldots$ ist keine Definition!

Def. 1.4 Def. den Betrag von $x \in \mathbb{R}$ durch $|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{sonst.} \end{cases}$

Bem. 1.5. (a) $|x-y|$ ist der Abstand von x und y, d.h. $|x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y$.



(b) $\forall x, y \in \mathbb{R}: |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

(c) $\forall x, y \in \mathbb{R}: |x+y| \leq |x| + |y|$ Dreiecksungleichung

Beweis: Nach Def. $-x, x \leq |x|$ und $-y, y \leq |y|$. Mit I 4.7(a)(i) folgt
$x + y \leq |x| + |y|$ und $-(x+y) = -x-y \leq |x+y|$ und somit die Beh. $\square$

Def. 1.6 (Konvergenz von Folgen) Eine reelle Folge (a_n) <u>konvergiert</u> gegen den <u>Grenzwert</u> (oder <u>Limes</u>) $a \in \mathbb{R}$ falls

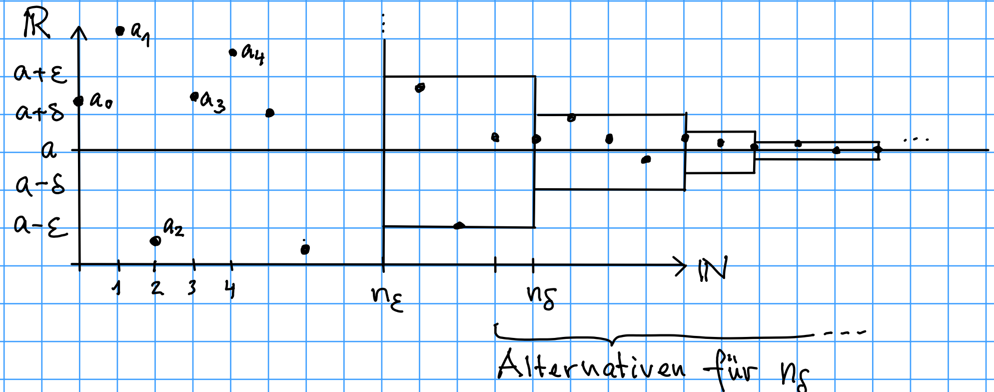
$$\forall \underbrace{\varepsilon > 0}_{\text{bedeutet } \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}} \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \underbrace{\forall n \geq n_\varepsilon}_{n \in \mathbb{N}_{\geq n_\varepsilon}} : |a_n - a| < \varepsilon$$

Man schreibt dann $a_n \to a$ (für $n \to \infty$) und nennt (a_n) <u>konvergent</u>.

Falls $a_n \to 0$ so heißt (a_n) eine <u>Nullfolge</u>. <u>Divergent</u> bedeutet nicht konvergent.

<u>Veranschaulichung:</u>

Bild zeigt den Graph $\Gamma_{(a_n)}$ der Folge. Wir schreiben jedoch $\bullet a_n$ statt $\bullet (n, a_n)$.



Bem. 1.7

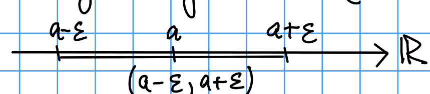
(a) $a \to a$, d.h. die konstante Folge a konvergiert gegen a.

(b) $a_n \to a \iff b_n := |a_n - a| \to 0 =: b$, denn $|a_n - a| = \big||a_n - a| - 0\big| = |b_n - b|$.

Insbesondere (a_n) Nullf. $\iff$ $(|a_n|)$ Nullf.

(c) $|x - a| < \varepsilon \iff x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ <u>ε-Umgebung von a</u> (siehe Def. I.4.9) und

$|x - a| \leq \varepsilon \iff x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$



(d) Ist $a_n = b_n$ für „fast alle" n (d.h. nur endlich viele Ausnahmen), so gilt $a_n \to a \iff b_n \to a$, d.h. „Folgenanfang" irrelevant für Konvergenz.

<u>Beweis:</u> Setze $m := \max\{n \mid a_n \neq b_n\}$ und ersetze n_ε durch $\max\{n_\varepsilon, m+1\}$ in der Def. von $a_n \to a$ bzw. $b_n \to a$. Dann gilt $\forall n \geq n_\varepsilon : a_n = b_n$. $\square$

(e) Für $m \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \to a \iff a_{n+m} \to a$ für $n \to \infty$.

Bsp. 1.8

(a) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ Nullfolge: Für $\varepsilon > 0$ setze dazu $n_\varepsilon := \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$.

Dann gilt $\forall n \geq n_\varepsilon: \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} \leq \varepsilon$ (siehe §0).

(b) $\left(\frac{n}{2^n}\right)$ Nullfolge: Für $n \geq 4$ gilt $2^n \geq n^2$ (Induktion, Übung)

und somit $\left|\frac{n}{2^n}\right| \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ nach (a). Bem. 1.7 (d) liefert Beh.

(c) $\frac{n}{n+1} \to 1$ da $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$ nach (a).

(d) Für (a_n) aus Bsp. 1.2 (e) gilt $a_n \longrightarrow \sqrt{2}$: Es gilt $\forall n \in \mathbb{N}: 1 \leq a_n \leq 2$ (Induktion, Übung). Wegen $1 \leq 2 \leq 4 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{2} \leq 2$ folgt

$|a_n - \sqrt{2}| \leq |2-1| = 1$ und somit

$$|a_{n+1} - \sqrt{2}| = \left|\frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} - \sqrt{2}\right| = \frac{|a_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}a_n|}{2a_n} \quad \text{(siehe Bem. 1.5 (b))}$$

$$= |a_n - \sqrt{2}| \cdot \frac{|a_n - \sqrt{2}|}{2a_n} \leq |a_n - \sqrt{2}| \cdot \frac{1}{2} \quad \text{(siehe §0)}$$

Mit Induktion ergibt dies für $n \geq 1$:

$$|a_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^n} \cdot |a_0 - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^n} \leq \frac{n}{2^n}.$$

Nach (b) gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $\frac{n}{2^n} < \varepsilon$ für $n \geq n_\varepsilon$.

(e) $((-1)^n) = 1, -1, 1, -1, \ldots$ ist divergent: Ang. $(-1)^n \longrightarrow a$.

Dann ist für $n \geq n_{\frac{1}{2}}$ gerade $(-1)^n = 1$ und $(-1)^{n+1} = -1$ und somit

$$|a-1| < \tfrac{1}{2} \wedge |a+1| < \tfrac{1}{2} \Rightarrow 2 = |1+1| \underset{1.5(c)}{\leq} |1-a| + |a+1| < \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 \ ↯.$$

Satz 1.9 (Eindeutigkeit des Grenzwerts)

Sei (a_n) eine reelle Folge mit $a_n \to a$ und $a_n \to b$. Dann gilt $a = b$.

Beweis: Angenommen $a \neq b$. Dann ist $\varepsilon := \frac{|a-b|}{3} > 0$ und nach Vor.

$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_\varepsilon: |a_n - a| < \varepsilon$ und $\exists m_\varepsilon \in \mathbb{N}: \forall n \geq m_\varepsilon: |a_n - b| < \varepsilon$.

Setze $n := \max\{n_\varepsilon, m_\varepsilon\}$. Dann gilt:

$$|a-b| \overset{1.5(c)}{\leq} |a - a_n| + |a_n - b| < 2\varepsilon = \tfrac{2}{3}|a-b| < |a-b| \ ↯.$$ $\square$

Def. 1.10 (Grenzwert, Beschränktheit, Monotonie) Sei (a_n) reelle Folge.

(a) Falls $a_n \to a$ schreibe $\lim a_n := \lim_{n\to\infty} a_n := a$ für den Grenzwert.

(b) Schreibe $\lim a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ oder $a_n \to \infty$ (für $n \to \infty$)

bzw. $\lim a_n = -\infty$, $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ oder $a_n \to -\infty$ (für $n\to\infty$).

falls $\forall x \in \mathbb{R}: \exists n_x \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_x: a_n \geq x$ bzw. $a_n \leq x$.

Man nennt (a_n) dann bestimmt divergent gegen ∞ bzw. $-\infty$.

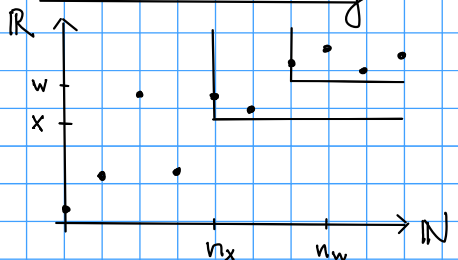
(c) $(a_n)_{n\geq m}$ heißt nach oben bzw. nach unten beschränkt falls $a_{\mathbb{N}_{\geq m}}$ eine obere bzw. untere Schranke hat (siehe Def. I.4.13).

Beschränkt bedeutet nach oben und unten beschränkt.

(d) (a_n) heißt (streng) monoton steigend/wachsend bzw. fallend falls

$\forall n, m: n \leq m \Rightarrow \left(a_n \underset{(<)}{\leq} a_m \text{ bzw. } a_n \underset{(>)}{\geq} a_m\right)$ (vgl. Def. I.4.13).

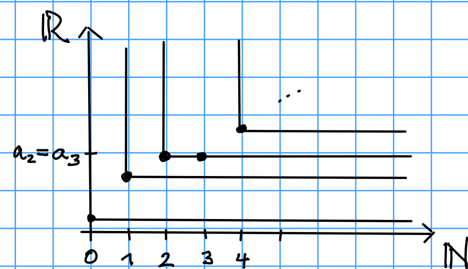
Veranschaulichung



$\lim a_n = \infty$

aber

nicht monoton



monoton steigend

aber

nicht streng

24.5.2017

Bem. 1.11: Sei (a_n) reelle Folge. Dann gilt:

(a) $\lim a_n = \infty$ (bzw. $-\infty$) $\Leftrightarrow$ $\lim (a_n)_{n\geq m} = \infty$ (bzw. $-\infty$) (vgl. Bem. 1.7(d))

(b) (a_n) beschränkt $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}: |a_n| \leq x$.

Denn nach Bem. 1.7 (c) gilt $|a_n| \leq x \Leftrightarrow -x \leq a_n \leq x$ und somit:

($\Rightarrow$) Seien v und w obere bzw. untere Schranken von $a_{\mathbb{N}}$. Setze

$x := \max\{|v|, |w|\}$. Dann gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}: -x \leq -|w| \leq w \leq a_n \leq v \leq |v| \leq x.$$

($\Leftarrow$) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $\forall n \in \mathbb{N}: |a_n| \leq x$. Dann sind $v := x$ und $w := -x$ obere und untere Schranken.

Lem. 1.12. Konvergente reelle Folgen sind beschränkt.

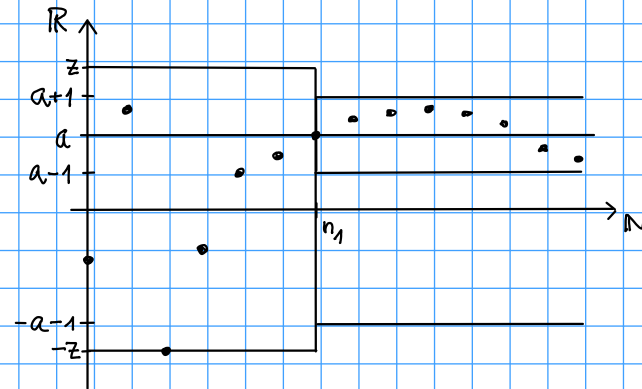
Beweis: Sei (a_n) reelle Folge mit $a_n \to a$. Wähle n_1 mit $\forall n \geq n_1: |a_n - a| < 1$.

Setze $z := \max\{|a_i| \mid i = 0, \dots, n_1 - 1\}$ (siehe Bem. I.4.12 (a),(b))

und $x := \max\{z, |a| + 1\}$.

Veranschaulichung mit $a \geq 0 \Rightarrow |a| = a$

und $x = z$.



Falls $n < n_1$ gilt $|a_n| \leq z \leq x$. Auch falls $n \geq n_1$ ist

$$|a_n| = |a_n - a + a| \underset{1.5(c)}{\leq} |a_n - a| + |a| \leq |a| + 1 \leq x.$$

Mit Bem. 1.11 folgt die Beh. □

Satz 1.13 Jede nach oben (bzw. unten) beschränkte monoton wachsende (bzw. fallende) Folge $(a_n)_{n \geq m}$ ist konvergent mit $\lim a_n = \sup_{\mathbb{R}} a_{\mathbb{N}_{n \geq m}}$ (bzw. $\inf_{\mathbb{R}} a_{\mathbb{N}_{n \geq m}}$).

Beweis Wir beweisen die erste Beh. (zweite analog). Nach Satz I.4.11 existiert $a := \sup_{\mathbb{R}} a_{\mathbb{N}_{n \geq m}}$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $a - \varepsilon < a$ keine obere Schranke von $a_{\mathbb{N}_{n \geq m}}$.

Somit $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}_{n \geq m}: a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon}$. Da (a_n) monoton steigend und a obere Schranke von $a_{\mathbb{N}_{n \geq m}}$ folgt $\forall n \geq n_\varepsilon$:

$$a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a_n \leq a < a + \varepsilon \Leftrightarrow a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \overset{1.7(c)}{\Leftrightarrow} |a_n - a| < \varepsilon.$$ □

Bem. 1.14 Lem. 1.13 wird falsch ohne Monotonieannahme,

z.B. ist $((-1)^n)$ aus Bsp. 1.8 (e) beschränkt, nicht monoton und divergent.

Satz 1.15 (Vergleichskriterium)

Seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ reelle Folgen und $m \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq m: b_n \leq a_n \leq c_n$.

(a) $b_n \to a \wedge c_n \to a \Rightarrow a_n \to a$

(b) $b_n \to \infty \Rightarrow a_n \to \infty$

(c) $c_n \to -\infty \Rightarrow a_n \to -\infty$

<u>Beweis:</u>

(a) Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $b_n \to a$ und $c_n \to a$. Sei $\varepsilon > 0$

Nach Vor. $\exists k_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\varepsilon : |b_n - a| < \varepsilon$ und

$\exists \ell_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq \ell_\varepsilon : |c_n - a| < \varepsilon$.

Setze $n_\varepsilon := \max\{k_\varepsilon, \ell_\varepsilon, m\}$. Dann gilt nach Bem. 1.7(c)

$$\forall n \geq n_\varepsilon : \quad a - \varepsilon \leq b_n \leq a_n \leq c_n \leq a + \varepsilon \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

(b) Sei $b_n \to \infty$ und $x \in \mathbb{R}$. Dann $\exists m_x \in \mathbb{N} : \forall n \geq m_x : b_n \geq x$.

Mit $n_x := \max\{m_x, m\}$ gilt $\forall n \geq n_x : a_n \geq b_n \geq x$.

(c) Analog zu (b). $\square$.

<u>Bsp. 1.16</u>

(a) In Bsp. 1.8 (d) war $0 \leq |a_n - \sqrt{2}| \leq \frac{n}{2^n}$ mit

$0 \to 0$ und $\frac{n}{2^n} \longrightarrow 0$ und somit $|a_n - \sqrt{2}| \longrightarrow 0$.

(b) Für $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt $\frac{1}{n^m} \to 0$ für $n \longrightarrow \infty$:

Per Induktion über m zeigt man $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : n \leq n^m$:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \leq n = n^1 \\ \text{Ang. } n \leq n^{m-1} \end{array}\right\} \overset{\cdot n}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l} n \leq n^2 \\ n^2 \leq n^m \end{array}\right\} \overset{\text{I.4.6.(iii)}}{\Longrightarrow} n \leq n^m \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{n^m} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{1.8(a)} 0$$

Mit Satz 1.15 folgt $\frac{1}{n^m} \to 0$ für $n \to 0$.

29.5.2017

<u>Lem. 1.17</u> Sind (a_n) und (b_n) konvergent und $m \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq m : a_n \leq b_n$.

Dann gilt $a := \lim a_n \leq \lim b_n =: b$.

<u>Beweis:</u> Ang. $a > b$. Dann ist $\varepsilon := \frac{a-b}{2} > 0$ und daher

$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}_{\geq m} : \forall n \geq n_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$ und $\exists m_\varepsilon \in \mathbb{N}_{\geq m} : \forall n \geq m_\varepsilon : |b_n - b| < \varepsilon$.

Für $n := \max\{n_\varepsilon, m_\varepsilon\}$ gilt dann (siehe Bem. 1.7 (c))

$b_n < b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = a - \frac{a-b}{2} = a - \varepsilon < a_n$ $\lightning$. Somit $a \leq b$. $\square$

<u>Bem. 1.18</u> Ersetzt man $a_n \leq b_n$ in Lem. 1.17 durch $a_n < b_n$ so folgt ebenfalls nur $a \leq b$ aber nicht notwendig $a < b$, z.B. $0 < \frac{1}{n} \to 0$.

Satz 1.19 Seien (a_n) und (b_n) konvergent. Dann gilt

(a) $\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$.

Insbesondere (siehe Bsp. 1.7 (a)) $\lim(c \cdot a_n) = c \cdot \lim a_n$ für $c \in \mathbb{R}$.

(b) Falls $\lim b_n \neq 0$ so gilt $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$.

(c) $\lim |a_n| = |\lim a_n|$.

$\exists m \in \mathbb{N} : \forall n \geq m : b_n \neq 0$ (siehe Beweis)

$\Rightarrow \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq m}$ reelle Folge

Beweis:

Setze $a := \lim a_n$, $b := \lim b_n$. Dann gilt $\forall \varepsilon > 0$:

$\exists k_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$ und $\exists l_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq l_\varepsilon : |b_n - b| < \varepsilon$.

(a) Sei $\varepsilon > 0$. Setze $n_\varepsilon := \max\{k_{\varepsilon/2}, l_{\varepsilon/2}\}$. Dann gilt

$\forall n \geq n_\varepsilon : |(a_n + b_n) - (a+b)| = |a_n - a + b_n - b| \overset{1.5(c)}{\leq} |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Somit $\lim(a_n + b_n) = a + b = \lim a_n + \lim b_n$ und analog mit $-$ statt $+$.

Nach Lem. 1.12 $\exists x \in \mathbb{R}_{>0} : \forall n : |b_n| \leq x$.

Setze $l_{\varepsilon,a} := \begin{cases} l_{\frac{\varepsilon}{2|a|}}, & \text{falls } a \neq 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$ und $n_\varepsilon := \max\{k_{\frac{\varepsilon}{2x}}, l_{\varepsilon,a}\}$.

Dann gilt $\forall n \geq n_\varepsilon$:

$|a_n b_n - ab| = |(a_n - a) b_n + a(b_n - b)| \underset{1.5}{\leq} \overbrace{|a_n - a|}^{\leq \frac{\varepsilon}{2x}}\overbrace{|b_n|}^{\leq x} + |a||b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Somit $\lim(a_n b_n) = a \cdot b = \lim a_n \cdot \lim b_n$.

(b) Da $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$ können wir wegen (a) $a_n = 1$ annehmen; o.B.d.A auch $b > 0$ (falls $b < 0$ analog). Sei $\varepsilon > 0$ und $n_\varepsilon := \max\{l_{\frac{b}{2}}, l_{\frac{\varepsilon b^2}{2}}\}$.

Für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt $0 < \frac{b}{2} = b - \frac{b}{2} < b_n$ (siehe Bem. 1.7 (c)) und dann

$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{b_n \cdot b} < |b_n - b| \cdot \frac{2}{b^2} < \frac{\varepsilon \cdot b^2}{2} \cdot \frac{2}{b^2} = \varepsilon$.

Somit $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b} = \frac{1}{\lim b_n}$.

(c) Übung. $\square$

Kor. 1.20 Ist (a_n) Nullfolge und (b_n) beschränkt, so ist $(a_n \cdot b_n)$ Nullfolge.

Beweis: Sei (a_n) Nullf. und wähle $x \in \mathbb{R}$ mit (siehe Bem. 1.11).

$\forall n: |b_n| \leq x \Rightarrow |a_n||b_n| \leq |a_n| \cdot x$. Nach Satz 1.19, Bem. 1.5 (b), Lem. 1.17 ist

$|\lim(a_n b_n)| = \lim |a_n b_n| = \lim(|a_n| \cdot |b_n|) \leq \lim(|a_n| \cdot x) = \lim |a_n| \cdot x = 0 \cdot x = 0$

$\Rightarrow \lim(a_n b_n) = 0$. Also $(a_n \cdot b_n)$ Nullfolge. $\square$.

Bem. 1.21 Für die Praxis sagt Satz 1.19, daß man lim mit $+, -, \cdot, /, ||$ vertauschen darf, solange man nicht durch Null teilt.

Bsp. 1.22 Nach Satz 1.19 gilt

$$\lim \frac{3n^2 + 7n + 1}{5n^2 + 3n + 2} = \lim \frac{3 + 7/n + 1/n^2}{5 + 3/n + 2/n^2}$$

$$= \frac{\lim 3 + \lim 7 \cdot \lim \frac{1}{n} + \lim \frac{1}{n^2}}{\lim 5 + \lim 3 \cdot \lim \frac{1}{n} + \lim 2 \cdot \lim \frac{1}{n^2}} \underset{1.16\,(b)}{\overset{1.7(a)}{=}} \frac{3}{5}$$

Allgemeiner gilt

Satz 1.23 Seien $c_0, \dots, c_k, d_0, \dots, d_\ell \in \mathbb{R}$ mit $c_k \neq 0 \neq d_\ell$. Dann gilt:

$$\lim \frac{c_k n^k + \dots + c_1 n + c_0}{d_\ell n^\ell + \dots + d_1 n + d_0} = \begin{cases} \frac{c_k}{d_k}, & \text{falls } k = \ell, \\ \pm\infty, & \text{falls } k > \ell \text{ und } c_k \cdot d_\ell \gtrless 0, \\ 0, & \text{falls } k < \ell. \end{cases}$$ $\square$

Lem. 1.24 Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ ist (x^n) Nullfolge.

Beweis: Wir können $x \neq 0$ annehmen. Setze $y := \frac{1}{|x|} - 1 > 0$.

Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 0.1 $\exists m \in \mathbb{N}: \frac{1}{\varepsilon} < m \Rightarrow \frac{1}{m} < \varepsilon$

und $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}: \frac{m}{y} < n_\varepsilon$. Nach Kor. II.2.6 gilt $\forall n \geq n_\varepsilon$:

$$\frac{1}{|x|^n} = (1+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{i}}_{>0} \underbrace{y^i}_{>0} \geq \sum_{i=0}^{1} \binom{n}{i} y^i = 1 + n \cdot y > 1 + \frac{m}{y} \cdot y > m.$$

Es folgt $|x|^n < \frac{1}{m} < \varepsilon$. $\square$

Def. und Satz 1.25 (Konvergenzkriterium von Cauchy)
Eine reelle Folge (a_n) heißt Cauchy-Folge falls
$\forall \varepsilon>0: \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}: \forall m,n \geq n_\varepsilon: |a_m - a_n| < \varepsilon$ (oder äquivalent
$\forall \varepsilon > 0: \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_\varepsilon: \forall k \in \mathbb{N}: |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$).
Die konvergenten reellen Folgen sind genau die Cauchy-Folgen. $\square$

Bem. 1.26 Satz 1.25 und Satz I.4.11 sind äquivalente Aussagen über $\mathbb{R}$.
Man kann $\mathbb{R}$ (aus $\mathbb{Q}$) als Menge von Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$ definieren wobei, für $(a_n), (b_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$,
$(a_n) \sim (b_n) :\Leftrightarrow (a_n - b_n)$ Nullfolge. Satz 1.25 gilt dann automatisch.

Bsp. 1.27. $a_0 := 1$, $a_{n+1} := \frac{1}{1+a_n}$. Per Induktion folgt $\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1$.
Dann gilt $\forall k, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$:

$$|a_{n+k+1} - a_{n+1}| = \left|\frac{1}{1+a_{n+k}} - \frac{1}{1+a_n}\right| = \frac{|a_{n+k} - a_n|}{(1+a_{n+k})(1+a_n)}$$
$$\leq \frac{|a_{n+k} - a_n|}{(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2})} = \frac{4}{9}|a_{n+k} - a_n|$$

Induktion liefert
$$|a_{n+k} - a_n| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n |a_k - a_0|$$
$$\underset{1.5(c)}{\leq} \left(\frac{4}{9}\right)^n (\underbrace{|a_k|}_{\leq 1} + \underbrace{|a_0|}_{\leq 1}) \leq 2 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n \longrightarrow 0 \text{ nach Lem. 1.23.}$$

Folglich ist (a_n) Cauchy-Folge und nach Satz 1.25 und Lem. 1.17.
$\exists\, a := \lim a_n \geq \frac{1}{2}$. Anwenden von Satz 1.19 auf die Rekursionsgleichung liefert den Grenzwert:

$$a = \lim a_{n+1} = \lim \frac{1}{1+a_n} = \frac{1}{1+\lim a_n} = \frac{1}{1+a}$$
$$\Rightarrow a^2 + a - 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Def. 1.28 (Teilfolge, Häufungspunkt) Sei $(a_n): \mathbb{N}_{\geq m} \to M$ eine Folge in M.
Ist $(k_n): \mathbb{N}_{\geq \ell} \to \mathbb{N}_{\geq m}$ streng monoton wachsende Folge, so nennt man $(a_{k(n)})_{n \geq \ell} = (a_n) \circ (k_n)$ eine Teilfolge von (a_n).
Grenzwerte konvergenter Teilfolgen von (a_n) heißen Häufungspunkte von (a_n).

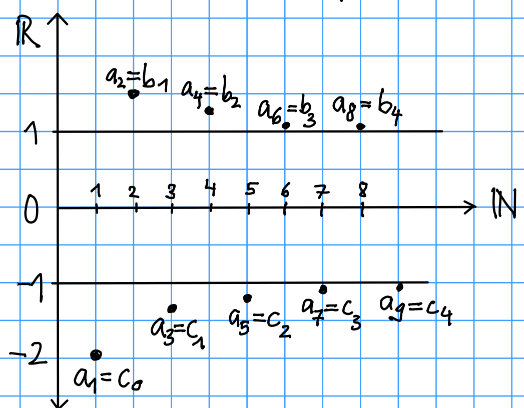
Bsp. 1.29. $(a_n) := \left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$, $(k_n) := (2n)_{n\geq 1}$, $(b_n) := (a_{k_n})_{n\geq 1}$ Teilfolge von (a_n).

$(a_n) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$

$(b_n) = \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{6}, \dots$

Satz 1.30 (Bolzano-Weierstraß) Jede beschränkte reelle Folge hat eine konvergente Teilfolge (und somit einen Häufungspunkt). □

Bsp. 1.31 $(a_n) = \left((-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)_{n\geq 1}$ ist nicht konvergent, jedoch sind $(b_n) = \left(1+\frac{1}{2n}\right)_{n\geq 1}$ und $(c_n) = \left(-1-\frac{1}{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ Teilfolgen mit $b_n \to 1$, $c_n \to -1$.



1.6.2017

Lem. 1.32. Sei $(a_n)_{n\geq m}$ konvergent und $(a_{k_n})_{n\geq \ell}$ eine Teilfolge. Dann ist $\lim a_{k_n} = \lim a_n$. Insbesondere ist $\lim a_n$ einziger Häufungspunkt von (a_n).

Beweis:

Da $(k_n)_{n\geq\ell}$ streng monoton wachsend ist, gilt (Induktion, Übung)

$\forall n\geq \ell: \; k_n - k_\ell \geq n-\ell$.

Setze $a := \lim a_n$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_\varepsilon: |a_n - a| < \varepsilon$.

Setze $m_\varepsilon := n_\varepsilon + \ell - k_\ell$. Dann gilt $\forall n \geq m_\varepsilon$:

$k_n \geq k_\ell + n - \ell \geq k_\ell + m_\varepsilon - \ell \geq n_\varepsilon \Rightarrow |a_{k_n} - a| < \varepsilon$.

Somit $a_{k_n} \to a$. Zudem ist $a = \lim a_n$ Häufungspunkt von (a_n) da (a_n) Teilfolge von sich selbst ist. □

2. Reihen entstehen durch Aufsummieren der Folgenglieder.

Def. 2.1 Sei $(a_n)_{n\geq m}$ eine reelle Folge. Die Folge $(s_n)_{n\geq m}$ der Partialsummen $s_n := \sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$ nennt man eine (reelle) Reihe. Man schreibt $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ für $(s_n)_{n\geq m}$ und für $\lim s_n$ im Falle der Konvergenz. Setzt man $a_k := 0$ und somit $s_k = 0$ für $k = 0, \dots, m-1$ so kann man $m = 0$ annehmen.

Bem. 2.2

(a) Jede reelle Folge $(s_n)_{n\geq m}$ ist eine reelle Reihe:

Setzt man nämlich $a_m := s_m$ und $a_k := s_k - s_{k-1}$ für $k \geq m+1$ so ist

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = s_m + \sum_{k=m+1}^{n} (s_k - s_{k-1})$$
$$= s_m + \sum_{k=m+1}^{n} s_k - \sum_{k=m+1}^{n} s_{k-1} = s_m + \sum_{k=m+1}^{n} s_k - \sum_{k=m}^{n-1} s_k$$
$$= s_m + \sum_{k=m+1}^{n-1} s_k + s_n - s_m - \sum_{k=m+1}^{n-1} s_k = s_n$$

(b) $\sum_{k=l}^{\infty} a_k$ konv. $\Leftrightarrow \sum_{k=m}^{\infty} a_k$ konv., $\sum_{k=l}^{\infty} a_k = \sum_{k=l}^{m-1} a_k + \sum_{k=m}^{\infty} a_k$ nach Satz 1.19(a) und

$\sum_{k=l}^{\infty} a_k = \infty$ (bzw. $-\infty$) $\Leftrightarrow \sum_{k=m}^{\infty} a_k = \infty$ (bzw. $-\infty$) (vgl. Bem. 1.7(d) und 1.11.(a))

Bsp. 2.3

(a) Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert: Sei $s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Wir zeigen, daß (s_{2^n}) divergiert und Beh. folgt aus Lem. 1.31.

$$s_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j} \frac{1}{k} \geq 1 + \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j}}_{2^j - 2^{j-1} = 2^{j-1}(2-1) = 2^{j-1} \text{ Summanden}} \frac{1}{2^j}$$
$$= 1 + \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\frac{2^{j-1}}{2^j}}_{=\frac{1}{2}} \geq 1 + \frac{n}{2} \longrightarrow \infty$$

$\overset{1.15(b)}{\Longrightarrow} s_{2^n} \to \infty$. Es gilt sogar $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ (Übung).

(b) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert: $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$:

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\cdot(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

$$= 2 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} \leq 2 \quad \text{und}$$

$$s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n^2} = s_n + \frac{1}{n^2} \geq s_n.$$

Somit ist (s_n) monoton steigend und nach oben beschränkt und nach Satz 1.13 konvergent. Nach Lem. 1.17 ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2$.

Tatsächlich gilt (Euler): $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Aus Satz 1.25 folgt unmittelbar

<u>Satz 2.4</u> (Cauchy-Kriterium für Reihen) Eine reelle Reihe

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k \text{ konv.} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\varepsilon\ \forall \ell \in \mathbb{N}: \left|\sum_{k=n}^{n+\ell} a_k\right| < \varepsilon \qquad \square$$

<u>Bsp. 2.5</u>

(a) Mit Satz 2.4 zeigt man Divergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ (siehe Bsp. 2.3.(a)) einfacher

$\forall n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ und somit $\nexists\ n_{\frac{1}{2}}$ in Satz 2.4.

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ divergiert, da $\forall n \in \mathbb{N}$: $\left|\sum_{k=n}^{n} (-1)^k\right| = 1$

und somit $\nexists\ n_1$ in Satz 2.4. Allgemeiner gilt:

<u>Lem. 2.6</u> Ist die reelle Reihe $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ konvergent, so ist (a_n) Nullfolge.

<u>Beweis:</u> Setze $\ell := 0$ in Satz 2.4. $\square$

<u>Bsp. 2.7</u>

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k}$ divergiert, da $\lim \frac{n+1}{n} = 1$.

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert obwohl $\lim \frac{1}{n} = 0$. Umkehrung von Lem. 2.6 also falsch.

Kor. 2.8 Die reelle Reihe $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$ konvergiert falls $\exists x \in \mathbb{R}\, \exists m \in \mathbb{N} \,\forall n \geq m$:
(i) $a_n \geq 0$ und (ii) $s_n := \sum\limits_{k=m}^{n} a_k \leq x$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (s_n) monoton wachsend, (ii) $\Rightarrow$ s_n nach oben beschränkt. Somit folgt Beh. aus Satz 1.13. $\square$

Def. 2.9 Die reelle Reihe $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent falls die Betragsreihe $\sum\limits_{k=m}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Bsp. 2.10 Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ konv. nach Lem. I.5.3., 1.24 und Satz 1.19 die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \lim \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1-\lim x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

Wegen $|x^n| = |x|^n$ und $||x|| = |x| < 1$ ist die Konvergenz absolut.

Satz 2.11 Absolut konvergente reelle Reihen konvergieren.

Beweis: Nach Bem. 1.5 (c) gilt $\left|\sum\limits_{k=n}^{n+l} a_k\right| \leq \sum\limits_{k=n}^{n+l} |a_k|$. Mit $\sum\limits_{k=m}^{\infty} |a_k|$ ist nach Satz 2.4 also auch $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$ konvergent. $\square$

Bsp. 2.12 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2}$ konvergiert (siehe Bsp. 2.3.(b), auch Satz 2.21)

Satz 2.13 (Majoranten-/Minorantenkriterium) Seien $(a_n)_{n\geq k}$, $(b_n)_{n \geq l}$ reelle Folgen.
(a) Falls $\sum\limits_{j=l}^{\infty} b_j$ konv. und $\exists m \in \mathbb{N}: \forall j \geq m: |a_j| \leq b_j$ so konv. $\sum\limits_{j=k}^{\infty} a_j$ abs.
(b) Falls $\sum\limits_{j=l}^{\infty} b_j$ div. und $\exists m \in \mathbb{N}: \forall j \geq m: 0 \leq b_j \leq a_j$ so div. $\sum\limits_{j=k}^{\infty} a_j$.

Beweis:
(a) Wir können $a_j \geq 0$ annehmen (und dann Beh. auf $|a_j|$ anwenden) und O.B.d.A. $k = l = m = 0$ (siehe Bem. 2.2.(b)). Dann ist $s_n := \sum\limits_{j=0}^{n} a_j$ monoton wachsend. Nach Lem. 1.12 $\exists x \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}: t_n := \sum\limits_{j=0}^{n} b_j \leq x$. Aus $a_j \leq b_j$ folgt $s_n \leq t_n \leq x$. Nach Satz 1.13 konvergiert $(s_n) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j$.
(b) folgt mit Lem. 1.12 und Satz 1.13 (Übung). $\square$

Bsp. 2.14 (a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$ konv., da $\frac{k!}{k^k} = \underbrace{\frac{k}{k}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{k-1}{k}}_{\leq 1} \cdots \underbrace{\frac{3}{k}}_{\leq 1} \cdot \frac{2}{k} \cdot \frac{1}{k} \leq \frac{2}{k^2}$ für $k \geq 2$

und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konv. (siehe Bsp. 2.3(b)).

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ div., da $k \geq \sqrt{k} \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ div.

(siehe Bsp. 2.3 (a))

(c) Für $m \geq 2$ konv. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^m}$ abs. nach Satz 2.11, da $\frac{1}{k^m} \leq \frac{1}{k^2}$

und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konv. (siehe Bsp. 2.3.(b)).

Kor. 2.15 (Quotientenkriterium) Sei $(a_n)_{n \geq k}$ reelle Folge.

(a) Falls $\exists q \in \mathbb{R}_{<1} : \exists m \in \mathbb{N} : \forall n \geq m : |a_{n+1}| \leq |a_n| \cdot q$ dann konv. $\sum_{j=k}^{\infty} a_j$ abs.

(b) Falls $\forall n \geq m : |a_{n+1}| \geq |a_n| \neq 0$ so div. $\sum_{j=k}^{\infty} a_j$.

Beweis:

(a) O.b.d.A $k = 0 \leq q$. Per Induktion $|a_n| \leq |a_0| \cdot q^n$ und nach Bsp. 2.10 (und Satz 1.19 (a)) konv. $\sum_{k=0}^{\infty} |a_0| \cdot q^k = \frac{|a_0|}{1-q}$. Beh. folgt aus Satz 2.13 (a).

(b) folgt mit Lem. 2.6 (Übung). □

Bsp. 2.16.

(a) Für $x \in \mathbb{R}$ konv. $\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ abs., denn für $n \geq 2 \cdot \lceil |x| \rceil$ ist

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|x|}{n+1} \cdot \frac{|x|^n}{n!} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{|x|^n}{n!} = \frac{1}{2} \left| \frac{x^n}{n!} \right|.$$

(b) Obwohl $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ abs. konv., folgt dies nicht aus Kor. 2.15 (a), da

$$\frac{1}{(n+1)^2} \Big/ \frac{1}{n^2} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{n^2+2n+1} \longrightarrow 1 \quad \text{(siehe Satz 1.23).}$$

$\Rightarrow \nexists q$ in Kor. 2.15 (a)

Satz 2.17 (Wurzelkriterium) Sei $(a_n)_{n \geq k}$ reelle Folge.

(a) Falls $\exists q \in \mathbb{R}_{<1} : \exists m \in \mathbb{N} : \forall n \geq m : \sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ so konv. $\sum_{j=k}^{\infty} a_j$ abs.

(b) Falls $\exists m \in \mathbb{N} : \forall n \geq m : \sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ so div. $\sum_{j=k}^{\infty} a_j$. □

Bsp. 2.18 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ def. durch $a_n := \begin{cases} 2^{-n}, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 3^{-n}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$

konv. nach Satz 2.17 abs., da

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{1}{3}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \leq \frac{1}{2} =: q$$

6.6.2017

Def. 2.19 Man nennt eine reelle Reihe $\sum_{k=m}^{\infty} b_k$ alternierend falls $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq m}: (-1)^n b_n \geq 0$ (oder $(-1)^n b_n \leq 0$).

Bem 2.20 Wenn immer $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq m}: a_n \geq 0$ so ist $\pm \sum_{k=m}^{\infty} (-1)^k a_k$ alternierend. Umgekehrt ist mit $a_n := |b_n|$ jede alternierende Reihe von dieser Form.

Satz 2.21 (Leibniz-Kriterium) Ist $(a_n)_{n \geq m}$ eine monoton fallende Nullfolge so konv. die alt. Reihe $\pm \sum_{k=m}^{\infty} (-1)^k a_k$ (nicht notwendig abs.).

Beweis: O.B.d.A. $m = 0$. Wir wenden Satz 2.4 an. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_\varepsilon: a_n < \varepsilon$. Setze $s_n := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$. Dann gilt:

(i) $s_{2i+2} = s_{2 \cdot i} - a_{2 \cdot i+1} + a_{2 \cdot i+2} \leq s_{2 \cdot i}$, d.h. $(s_{2 \cdot i})$ mono. fallend,

(ii) $s_{2i+3} = s_{2 \cdot i+1} + a_{2 \cdot i+2} - a_{2 \cdot i+3} \geq s_{2 \cdot i+1}$, d.h. $(s_{2 \cdot i+1})$ mono. steigend,

(iii) $0 \leq s_{2 \cdot i} - s_{2i+1} = a_{2i+1}$, $0 \leq s_{2 \cdot i+2} - s_{2 \cdot i+1} = a_{2 \cdot i+2}$.

Seien nun $n \geq n_\varepsilon$ und $l \in \mathbb{N}$. Zu zeigen ist $\left| \sum_{k=n}^{n+l} (-1)^k a_k \right| < \varepsilon$.

Falls $n = 2i+1$ ungerade und $n + l = 2 \cdot j$ gerade so gilt:

$$\left| \sum_{k=n}^{n+l} (-1)^k a_k \right| \overset{(i)}{=} s_{2 \cdot i} - s_{2 \cdot j} \overset{(iii)}{\leq} s_{2 \cdot i} - s_{2 \cdot j+1}$$
$$\overset{(ii)}{\leq} s_{2 \cdot i} - s_{2 \cdot i+1} \overset{(iii)}{=} a_{2 \cdot i+1} = a_n < \varepsilon.$$

Die 3 weiteren Fälle behandelt man analog. □

Bsp. 2.22 $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k}$ konv. nach Bsp. 1.8(a), Satz 2.21 und Bsp. 2.3(a) nicht abs.

Def. 2.23 Für $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv nennt man $(a_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}} = (a_n) \circ \sigma$ eine Umordnung der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und entsprechend $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ eine Umordnung der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Satz 2.24 Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ abs. konv. so auch jede Umordnung mit gleichem Grenzwert. $\square$

Bem. 2.25

(a) Satz 2.24 wird falsch wenn man nur Konvergenz annimmt.

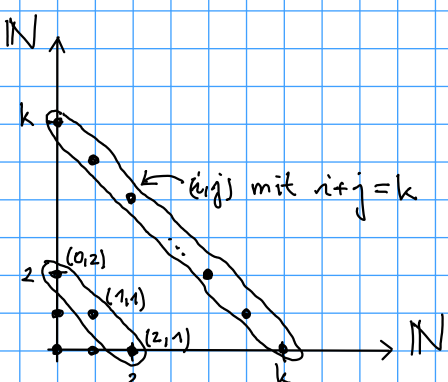
(b) Satz 2.24 rechtfertigt Schreibweise $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k := \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ für abs. konv. Reihen.

Kor 2.26. (Cauchy-Produkt) Sind $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$, $\sum_{k\in\mathbb{N}} b_k$ abs. konv. reelle Reihen, so auch

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{\left(\sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j\right)}_{=\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot b_{k-i}} = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} b_k\right) \qquad \square$$

Veranschaulichung:

Indexmengen der Koeffizientensummen



3. Potenzreihen

Def. 3.1 (a) Eine Abbildung $D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt (reelle) Funktion.

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folge und $x_0 \in \mathbb{R}$.

Für variables $x \in \mathbb{R}$ nennt man $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ eine Potenzreihe mit Koeffizienten a_k, Entwicklungspunkt x_0 und Konvergenzbereich $C = C_{(a_n),x_0} := \{ x \in \mathbb{R} \mid \sum_{k=\infty} a_k(x-x_0) \text{ konv.} \}$.

Sie def. eine Funktion $C \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sum_{k=0} a_k(x-x_0)^k$.

Bem. 3.2. $C_{(a_n),x_0} = \{ x + x_0 \mid x \in C_{(a_n),0} \}$.

Wir können/werden daher $x_0 = 0$ annehmen.

Bsp. 3.3

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ konv. (abs.) $\Longleftrightarrow$ $|x| < 1$ nach Kor. 2.15, da $|x^{n+1}| = \underbrace{|x|}_{=:q} \cdot |x^n|$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}$: $\exp(x)$ konv. abs. (siehe Bsp. 2.16.(a))

(c) Für $x = x_0$ gilt immer $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = a_0$.

Lem. 3.4. Konv. die Potenzreihe $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ für $x = y \in \mathbb{R}$, dann konv. $P(x)$ absolut für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < |y|$.

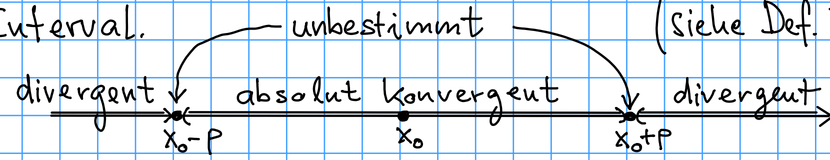
Beweis: Nach Lem. 2.6, 1.12 und Bem. 1.11.(b) $\exists c \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}: |a_n y^n| < c$.
Mit $q := \frac{|x|}{|y|} < 1$ folgt $|a_n x^n| \le c \cdot q^n$. Satz 2.13 und Bsp. 2.10 liefern Beh. □

Def. 3.5 $\rho = \rho_{(a_n)} := \sup \{ x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konv.} \} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$
(siehe Bem. 3.3.(c)) heißt Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)$. Supremum existiert nicht.

Satz 3.6 $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konv. abs. falls $|x| < \rho$, div. falls $|x| > \rho$.

Beweis: Falls $|x| < \rho$. Nach Def. von ρ als Sup. $\exists y \in (|x|, \rho)$: $P(y)$ konv. Dann konv. $P(x)$ nach Lem. 3.4. Falls $x > \rho$ div. $P(x)$ nach Def. von ρ.
Sei $x < -\rho$ und somit $\rho < -x = |x|$. Setze $y := \frac{\rho + |x|}{2}$. Dann ist $\rho < y < |x|$ und somit $P(x)$ div. nach Def. von ρ und Lem. 3.5. □

<u>Kor. 3.7</u> Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folge, $x_0\in\mathbb{R}$ und $\rho := \rho(a_n)$. Dann ist
$C_{(a_n),x_0} = \underset{\substack{\text{oder}\\ (}}{[} x_0-\rho, x_0+\rho \underset{\substack{\text{oder}\\ )}}{]}$ ein Intervall. (siehe Def. I 4.9)



$\square$

<u>Satz 3.8</u> (Berechnung des Konvergenzradius) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folge und $m\in\mathbb{N}$ mit $b_n = \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ <u>bzw.</u> $b_n = \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ für $n\geq m$.
Falls dann $b := \lim b_n \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$, so gilt $\rho(a_n) = b$.

<u>Beweis</u>: Folgt aus Kor. 2.15 <u>bzw.</u> Satz 2.17. Ist z.B. $b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ im ersten Fall, so gilt

$$\lim \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim\left(\frac{|x|}{b_n}\right) \overset{1.19}{=} \frac{|x|}{b}.$$

Falls $|x|<b$ wähle $\varepsilon := \frac{1-|x|/b}{2} > 0$. Dann ist $\forall n\geq n_\varepsilon$:

$$\frac{|a_{n+1}\cdot x^{n+1}|}{|a_n\cdot x^n|} < \frac{|x|}{b}+\varepsilon = \frac{1+|x|/b}{2} =: q < 1 \Rightarrow |a_{n+1}x^{n+1}| < q\cdot|a_n\cdot x^n|.$$

Nach Kor. 2.15 ist also $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ abs. konv. falls $|x|<b$ und analog div. falls $|x|>b$. Rest analog. $\square$.

<u>Bem. 3.9</u> (<u>Formel von Hadamard</u>) Wenn (b_n) in 3.8 nicht konvergiert, ist
$$\rho(a_n) = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$
wobei $\limsup c_n := \inf\{\sup c_{\mathbb{N}_{\geq n}} \mid n\in\mathbb{N}\}$ der größte Häufungswert von (c_n) ist.

Bsp. 3.10

(a) Sei $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Für $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^m}$ ist $\rho = 1$, da nach Satz 1.23

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^m} \Big/ \frac{1}{(n+1)^m}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^m}{n^m} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^m + m n^{m-1} + \dots + 1}{n^m} = 1,$$

und $C = [-1, 1)$ für $m = 1$ und $C = [-1, 1]$ für $m \geq 2$ nach Kor. 3.7, Bsp. 2.3(a), 2.22 und 2.14(c).

(b) Für $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ ist $\rho = \infty$ und $C = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ nach Bsp. 2.16.(a).
Aternativ rechnet man $\lim\left(\frac{1}{n!} \Big/ \frac{1}{(n+1)!}\right) = \lim(n+1) = \infty$.

(c) Für die Sinus- und Cosinusreihen, def. durch

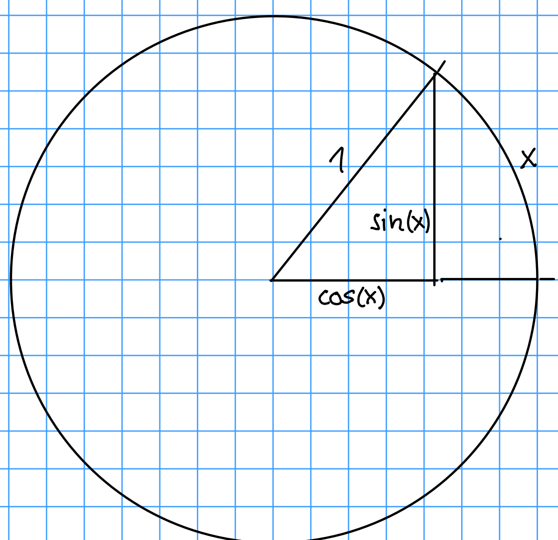
$$\sin(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{bzw.} \quad \cos(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!}$$

ist $\rho = \infty$ nach Satz 3.8, denn, im Fall von sin,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2(n+1)+1)!}{(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} (2(n+1)+1)(2n) \geq \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

und analog für cos.

Veranschaulichung (ohne Beweis)



Pythagoras

$$\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$$

4. Exponentialfunktion

Def. 4.1 Die Funktion $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, heißt Exponentialfunktion. Man nennt $e := \exp(1)$ die Eulersche Zahl.

Bem. 4.2 Nach Bsp. 3.3(c), $\exp(0) = 1$. Für $x > 0$ gilt nach Bem. 2.2.(b) und Lem. 1.17 $\exp(x) = 1 + x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq 1 + x > 1$.

8.6.2017

Satz 4.3 Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$.

Beweis: Nach Kor. 2.26 und II.2.6 gilt

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i+j=k} \frac{x^i y^j}{i!\, j!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i+j=k} \underbrace{\frac{k!}{i!\, j!}}_{= \binom{k}{i}} x^i y^j = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = \exp(x+y). \qquad \square$$

Def. 4.4 $\mathbb{R} \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ heißt (streng) monoton wachsend/steigend bzw. fallend falls $\forall x, y \in D:\ x \underset{(<)}{\leq} y \Rightarrow f(x) \underset{(<)}{\leq} f(y)$ bzw. $f(x) \underset{(>)}{\geq} f(y)$ (vgl. Def. I.4.13).

Kor. 4.5. $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ streng monoton steigend.

Beweis: Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y > x$. Nach Satz 4.2 gilt:

(i) $\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) \overset{4.2}{=} \exp\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \exp\left(\frac{x}{2}\right) = \exp\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geq 0$.

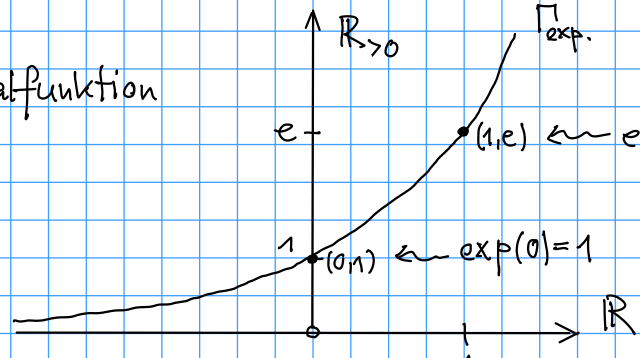
(ii) $1 = \exp(0) = \exp(x-x) = \exp(x) \cdot \exp(-x) \Rightarrow \exp(x) \neq 0$ (und $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$)

(iii) $\exp(y) = \exp(x + (y-x)) = \underbrace{\exp(x)}_{\substack{>0 \\ (i),(ii)}} \cdot \underbrace{\exp(y-x)}_{\substack{>1 \\ \text{Bem. } 4.2}} > \exp(x)$. $\square$

Satz 4.6. $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ bijektiv (injektiv nach Kor 4.5 und Bem. I.4.14(a)) $\square$

Veranschaulichung

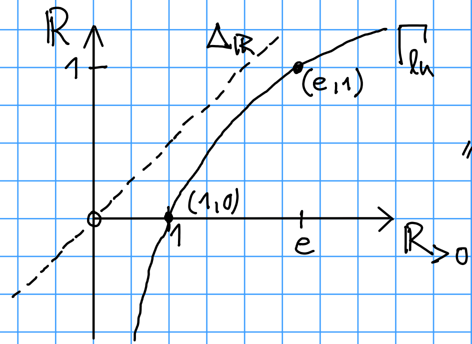
Graph der Exponentialfunktion



Def. 4.7 $\ln := \exp^{-1}: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ heißt <u>natürlicher Logarithmus</u>.

<u>Veranschaulichung</u>

Graph des nat. Logarithmus



$\Gamma_{\ln}$ entsteht aus $\Gamma_{\exp}$ durch „Spiegelung an Diagonalen $\Delta_{\mathbb{R}}$"

Kor. 4.8 $\ln$ ist streng monoton steigend und $\forall x, y \in \mathbb{R}_{>0}: \ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$.

<u>Beweis</u>: Folgt aus Satz 4.3 und Kor 4.5 (Übung). □

Bem. 4.9 $\ln(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k$ für $x \in (0,2]$. $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} = -\ln(2)$ (siehe Bsp. 2.22).

Def. 4.10 Für $a \in \mathbb{R}_{>0}$ definiere:

(i) $\exp_a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(x \cdot \ln(a)) =: a^x$ <u>Exponentialfunktion zur Basis a</u>,

(ii) $\log_a: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x)/\ln(a)$ <u>Logarithmus zur Basis a</u> $\neq 1$ ($\Leftrightarrow \ln(a) \neq 0$).

Insbesondere $e^x = \exp(x)$ und $\log_e = \ln$ (siehe Bem. 4.2).

Kor. 4.11 Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$.

(a) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ und $a^{x \cdot y} = (a^x)^y$. Insbesondere, $a^{-x} = 1/a^x$ und $a^{1/y} =: \sqrt[y]{a}$ für $y \neq 0$ (vgl. Satz und Def. 0.3).

(b) Für $a > 1$ bzw. $a < 1$ ist $\exp_a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ bijektiv streng monoton steigend bzw. fallend mit Umkehrfunktion $\log_a: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$.

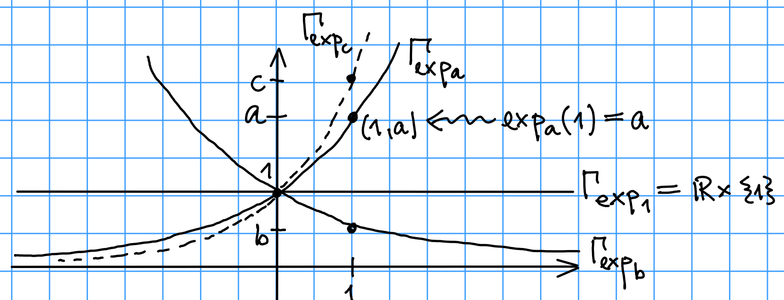
(c) Falls $a \neq 1$ gilt $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$ und $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$.

<u>Beweis</u>: Nachrechnen (Übung). □

<u>Veranschaulichung</u>

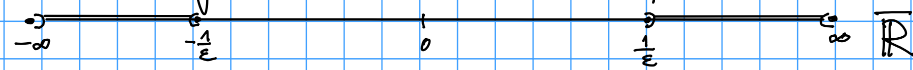
$\Gamma_{\exp_a}$ wird steiler mit wachsendem a.

$\Gamma_{\log_a}$ entsteht durch Spiegelung an $\Delta_{\mathbb{R}}$



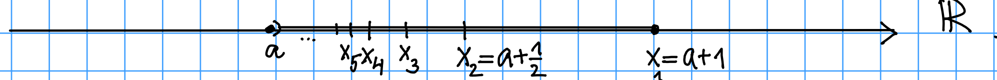
5. Grenzwerte von Funktionen

<u>Not. 5.1.</u> Setze $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ und für $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $|x - (\pm\infty)| < \varepsilon :\Leftrightarrow \pm x > \frac{1}{\varepsilon}$.
Dann ist $(\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$ bzw. $(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$ die wie in Bem. 1.7 (c) definierte <u>ε-Umgebung von ∞ bzw. von $-\infty$.</u> Bestimmte Divergenz (siehe Def. 1.10(b)) lässt sich hiermit formal wie Konvergenz (siehe Def. 1.6) definieren.
<u>Veranschaulichung</u>:



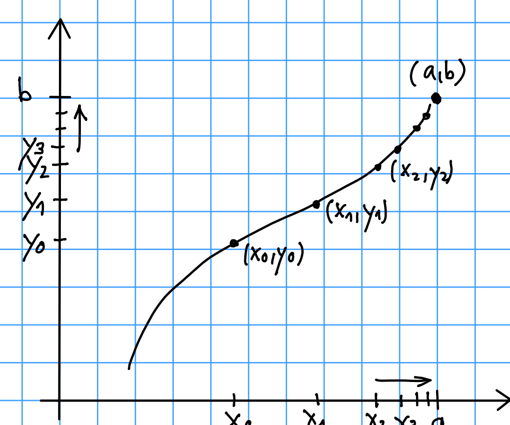
<u>Def. 5.2.</u> (a) $a \in \overline{\mathbb{R}}$ heißt <u>Berührungspunkt</u> von $D \subseteq \mathbb{R}$ falls $\exists (x_n) \in D^{\mathbb{N}}: x_n \to a$.
(b) Ein Berührungspunkt $a \in \overline{\mathbb{R}}$ von $D \setminus \{a\}$ heißt <u>Häufungspunkt</u> von D.

<u>Bem. 5.3.</u> (a) Jedes $a \in D$ ist Berührungspunkt von D, da $x_n := a \to a$.
Aber auch $a \notin (a, b]$ ist Berührungspunkt von $(a, a+1]$ mit $x_n := a + \frac{1}{n}$.



(b) $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ist Berührungspunkt von $D \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0: \exists x_\varepsilon \in D: |x_\varepsilon - a| < \varepsilon$ (Übung).

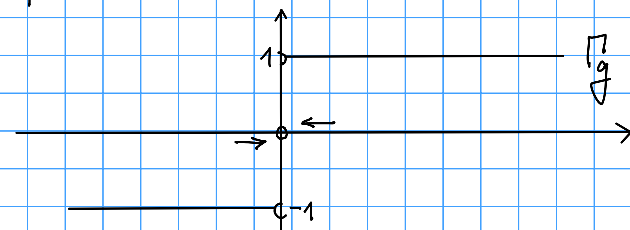
<u>Def. 5.4</u> Sei $\mathbb{R} \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ reelle Funktion.
Dann heißt $b \in \overline{\mathbb{R}}$ <u>Grenzwert von f</u> im Berührungspunkt $a \in \overline{\mathbb{R}}$ von D falls
$\forall (x_n) \in D^{\mathbb{N}}: \quad x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to b$. Man schreibt dann
$x \to a \Rightarrow f(x) \to b$ oder $f(x) \to b$ für $x \to a$ oder $\lim\limits_{x \to b} f(x) := b$.
Wir schreiben $\lim\limits_{x \to a} f(x) \underset{(\notin)}{\in} \overline{\mathbb{R}}$ falls der Grenzwert (nicht) existiert.
Ohne explizite Angabe von D ist $D = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ ist definiert}\}$ gemeint.
<u>Veranschaulichung</u>
$x_n \to a \Rightarrow y_n := f(x_n) \to b$



Bsp. 5.5

(a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$, denn 3 ist Berührungspunkt von $D = \mathbb{R}\setminus\{3\}$ und für $D \ni x_n \to 3$ ist $\frac{x_n^2-9}{x_n-3} = x_n + 3 \longrightarrow 6$ nach Satz 1.19 (a).

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{|x|} \notin \overline{\mathbb{R}}$, denn 0 ist Berührungspunkt von $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und für $D \ni \pm\frac{1}{n} \to 0$ gilt $g(\pm\frac{1}{n}) = \pm 1$.



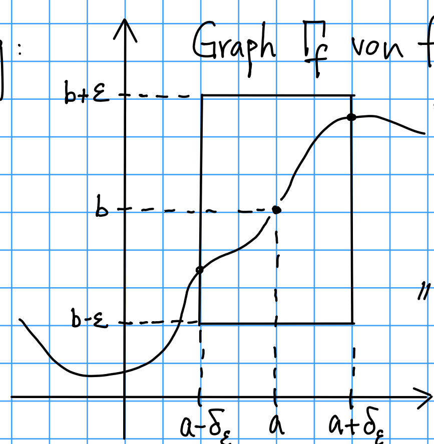
Bem. 5.6 $\lim\limits_{x\to a} c = c$ für $c \in \mathbb{R}$ und $\lim\limits_{x\to a} x = a$.

Lem. 5.7. (<u>ε-δ-Kriterium für Grenzwert</u>)

Sei $\mathbb{R} \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ reelle Funktion, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ Berührpunkt von D. Dann gilt

$$b := \lim_{x\to a} f(x) \in \overline{\mathbb{R}} \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in \mathbb{R} : |x-a| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon .$$

<u>Veranschaulichung</u>: Graph Γ_f von f nahe (a,b).



Γ_f tritt <u>hier</u> durch die rechte und linke Seite des Rechtecks aus, muss jedoch i. A. <u>keine</u> „kontinuierliche Linie" wie abgebildet sein (siehe §6).

<u>Beweis</u>: Wir betrachten den Fall $a, b \in \mathbb{R}$. Rest Übung.

($\Leftarrow$) Sei $(x_n) \in D^{\mathbb{N}}$ mit $x_n \longrightarrow a$ und $\varepsilon > 0$. Dann $\exists\, n_{\delta_\varepsilon} \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_{\delta_\varepsilon}$:
$|x_n - a| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x_n) - b| < \varepsilon$. Somit $f(x_n) \to b$.

($\Rightarrow$) Sei $\varepsilon > 0$. Ang. $\forall \delta > 0 : \exists x_\delta \in \mathbb{R} : |x_\delta - a| < \delta \wedge |f(x_\delta) - b| \geq \varepsilon$.
Dann gilt $x_{\frac{1}{n}} \longrightarrow a$ jedoch nicht $f(x_{\frac{1}{n}}) \longrightarrow b$. $\lightning$ $\square$

Bsp. 5.8 $\lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1$ wegen Satz 1.19 (a) oder mit Lem. 5.6:

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta_\varepsilon := \min\{\frac{\varepsilon}{3}, 1\}$. Dann gilt $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$|x-1| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |x^2 - 1| = \underbrace{|x-1|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} \cdot |x+1| < \frac{\varepsilon}{3}\left(\underbrace{|x-1|}_{<1} + |2|\right) < \frac{\varepsilon}{3} \cdot 3 = \varepsilon .$$

Satz 5.9 Seien $\mathbb{R} \supseteq D \xrightarrow{f,g,h} \mathbb{R}$ reelle Funktionen, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ Berührungspunkt von D, und $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in D : |x-a| < \varepsilon \Rightarrow g(x) \leq f(x) \leq h(x)$. Dann gilt:

(a) $b := \lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

(b) $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

(c) $\lim\limits_{x \to a} h(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

Beweis: Folgt aus Satz 1.15. □

Satz 5.10 Seien $\mathbb{R} \supseteq D \xrightarrow{f,g} \mathbb{R}$ reelle Funktionen, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ Berührungspunkt von D mit $\lim\limits_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R}$ und $\lim\limits_{x \to a} g(x) \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) \stackrel{+}{\underset{\cdot}{-}} g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \stackrel{+}{\underset{\cdot}{-}} \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

Insbesondere (siehe Bem. 5.6.) $\lim\limits_{x \to a} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$ für $c \in \mathbb{R}$.

(b) Falls $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$ so $\lim\limits_{x \to a} (f(x)/g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \Big/ \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

(c) $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |\lim\limits_{x \to a} f(x)|$.

a ist Berührungspunkt von $D' := \{x \in D \mid g(x) \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)}$.

(d) Falls $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in D : |x-a| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \leq g(x)$ so gilt $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

Beweis: Folgt aus Satz 1.19 und Lem. 1.17 □

Def. 5.11 (Rationale- und Polynomfunktionen)

(i) Mit $k \in \mathbb{N}$ und $c_0, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ nennt man $\mathbb{R} \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ x \mapsto \sum\limits_{i=0}^{k} c_i x^i$, eine <u>Polynomfunktion</u>, falls $c_k \neq 0$ <u>vom Grad k</u>.

(ii) Sind p und q Polynomfunktionen, so nennt man $\{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\} \supseteq D \xrightarrow{r} \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$, eine <u>rationale Funktion</u>.

Kor. 5.12 Ist $a \in D \xrightarrow{r} \mathbb{R}$ rational so gilt $\lim\limits_{x \to a} = r(a)$.

Beweis: Nach Satz 5.8 vertauscht $\lim\limits_{x \to a}$ mit $+, -, \cdot, /, c\cdot$ und $\lim\limits_{x \to a} x = a$. □.

Bsp. 5.13 $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 5}{x^3 - 2} = \frac{1^2 - 3 \cdot 1 + 5}{1^3 - 2} = \frac{3}{-1} = -3$.

Lem. 5.14 Sei $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Polynomfunktion. Dann gilt:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(p(x)/\exp(x)\right) = 0$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln(x)/p(x)\right) = 0$

(c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} p(x) = (\pm)\,\infty$ falls p von (un)geradem Grad.

Beweis:

(a) Sei $p(x) = \sum\limits_{i=0}^{k} c_i x^i$. Mit $c := \max\{|c_i| \mid i=0,\dots,k\}(k+1)!$ gilt für $x \geq 1$, $n > k$:

$$|p(x)| \underset{1.5}{\leq} \sum_{i=0}^{k} |c_i|\,|x|^i \leq \frac{c}{x}\cdot\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \leq \frac{c}{x}\cdot\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!} \overset{1.17}{\Rightarrow} |p(x)| \leq \frac{c}{x}\cdot\exp(x)$$

$$\underset{1.7(c)}{\overset{4.5.}{\Rightarrow}} -\frac{c}{x} \leq \left|\frac{p(x)}{\exp(x)}\right| \leq \frac{c}{x}.$$ Wegen $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$ liefert Satz 5.9.(a) die Beh.

(b), (c) Übung. $\square$

Def. 5.15 Sei $\mathbb{R} \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ reelle Funktion, $a \in \mathbb{R}$. Man nennt

(i) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) := \lim\limits_{x\to a}\left(f|_{D_{\leq a}}\right)(x)$ linksseitigen Grenzwert und

(ii) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) := \lim\limits_{x\to a}\left(f|_{D_{\geq a}}\right)(x)$ rechtsseitigen Grenzwert von f in a.

Bsp. 5.16 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{|x|} = 1$, da $\frac{x}{|x|}\Big|_{\mathbb{R}_{>0}} = 1$,

und $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{|x|} = -1$, da $\frac{x}{|x|}\Big|_{\mathbb{R}_{<0}} = -1$ (vgl. Bsp. 5.5.(b))

Lem. 5.17 Seien $\mathbb{R} \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ Berührungspunkt von $D_{\leq a}$ und $D_{\geq a}$.

Dann gilt: $\lim\limits_{x\to a} f(x) \in \overline{\mathbb{R}} \iff$ (i) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ und

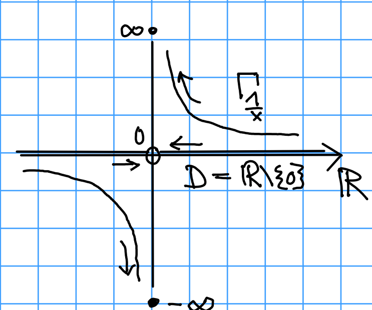
(ii) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ und

(iii) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

In diesem Fall gilt $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a^\pm} f(x)$.

Beweis: Übung $\square$

Bsp. 5.18 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x} \notin \overline{\mathbb{R}}$



6. Stetigkeit

Def. 6.1 Sei $\mathbb{R} \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ reelle Funktion.

(i) f heißt (links-/rechts-) stetig in $a \in D$ falls
$\left(\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a) \,/\, \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)\right)$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

(ii) f heißt stetig falls $\forall a \in D$: f stetig in a.
Intuitiv bedeutet dies, daß der Graph Γ_f eine „kontinuierliche Linie" ist.

(iii) f heißt stetig fortsetzbar in $a \in \mathbb{R} \setminus D$ falls $b := \lim\limits_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R}$.

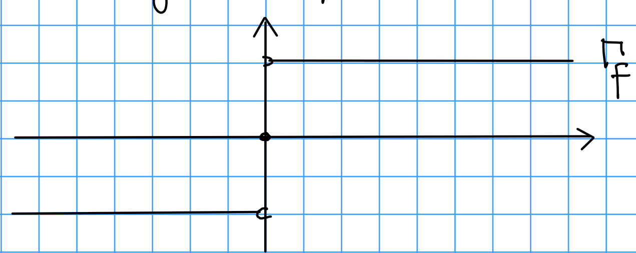
Man nennt dann $\bar{f} : D \cup \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\bar{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in D, \\ b, & \text{falls } x = a, \end{cases}$

die stetige Fortsetzung von f in a.

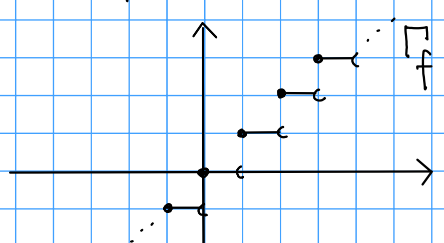
Bsp. 6.2

(a) Rationale Funktionen sind stetig (siehe Kor. 5.12)

(b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $0 \neq x \longmapsto \frac{x}{|x|}$, $0 \longmapsto 0$, ist stetig in $a \iff a \neq 0$.
$f|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$ ist nicht stetig in 0 fortsetzbar (siehe Bsp. 5.5(b)).

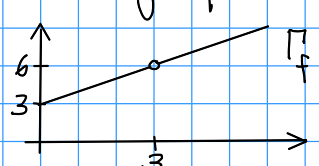


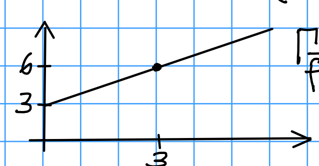
(c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ (siehe Kor. und Def. 0.2).



Dann ist f stetig in $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und rechts- aber nicht linksstetig in $a \in \mathbb{Z}$.

(d) $\mathbb{R} \setminus \{3\} =: D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{x^2 - 9}{x - 3}$, ist in 3 stetig fortsetzbar mit stetiger Fortsetzung $\bar{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x + 3$ (siehe Bsp. 5.5(a)).





Bem. 6.3

(a) Stetigkeit ist eine „lokale Eigenschaft", d.h. $\forall a \in \mathbb{R}$:

f stetig in $a \iff \exists \varepsilon > 0 : f|_{(a-\varepsilon, a+\varepsilon)}$ stetig in a.

(b) Ist $E \subseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ stetig, so auch die Einschränkung $f|_E$ (siehe Def. I.3.13.)

Def 6.4 Seien $\mathbb{R} \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \supseteq E \xrightarrow{g} \mathbb{R}$. Definiere $E_{g \neq 0} = \{x \in E \mid g(x) \neq 0\}$,

(a) $f \pm g : D \cap E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) \pm g(x)$,

(b) $f/g : D \cap E_{g\neq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x)/g(x)$, und

(c) $g \circ f : D \cap f^{-1}(E) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto g(f(x))$ (vgl. Def. I.3.7).

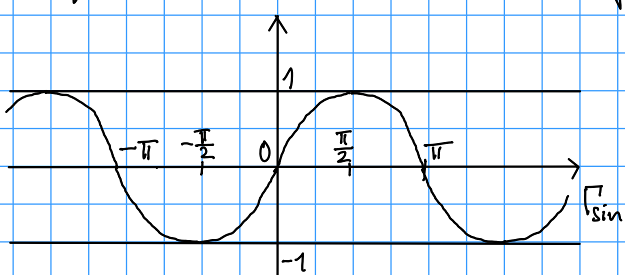
Kor. 6.5 Mit f und g ist auch $f \pm g$ stetig.

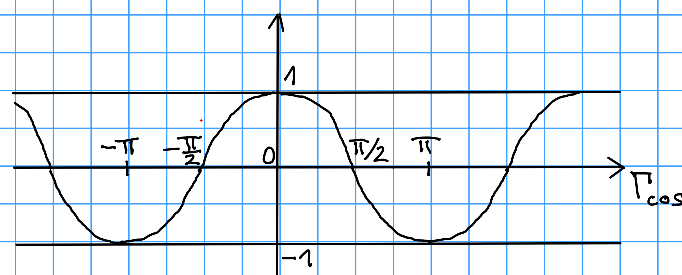
Beweis: Folgt aus Satz 5.10. $\square$

Satz 6.6 Durch Potenzreihen def. Funktionen sind stetig. $\square$

Bsp. 6.7

(a) $\exp, \sin, \cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig (siehe Def. 4.1 und Bsp. 3.10 (c))





(b) $\ln : (0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig (siehe Bem. 4.9).

Satz 6.8. Sind $\mathbb{R} \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \supseteq E \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ stetig so auch $D \cap f^{-1}(E) \xrightarrow{g \circ f} \mathbb{R}$.

Beweis: Sei $a \in D \cap f^{-1}(E)$. Dann gilt $\forall (x_n) \in D^{\mathbb{N}}$:

$$x_n \to a \underset{f \text{ stetig in } a}{\Longrightarrow} f(x_n) \to f(a) \underset{g \text{ stetig in } f(a)}{\Longrightarrow} g \circ f(x_n) = g(f(x_n)) \to g(f(a)) = g \circ f(a)$$

Somit $g \circ f$ stetig in a. □

Satz 6.9 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Interval und $f: I \to J \subseteq \mathbb{R}$ stetig bijektiv.
Dann ist J ein Interval und die Umkehrfunktion $f^{-1}: J \to I$ stetig. □

Bsp. 6.10 Seien $a \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}$.

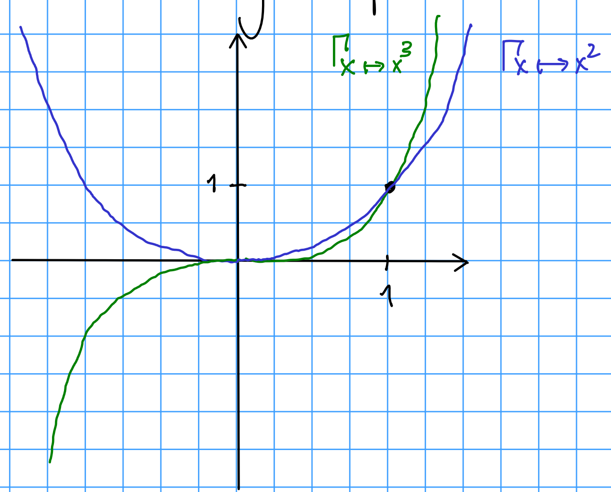
(a) $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, denn $\exp_a = f \circ g$ mit $f(x) = \exp(x)$ stetig nach Bsp. 6.7(a) und $g(x) = x \cdot \ln(a)$ stetig nach Bsp. 6.2(a).

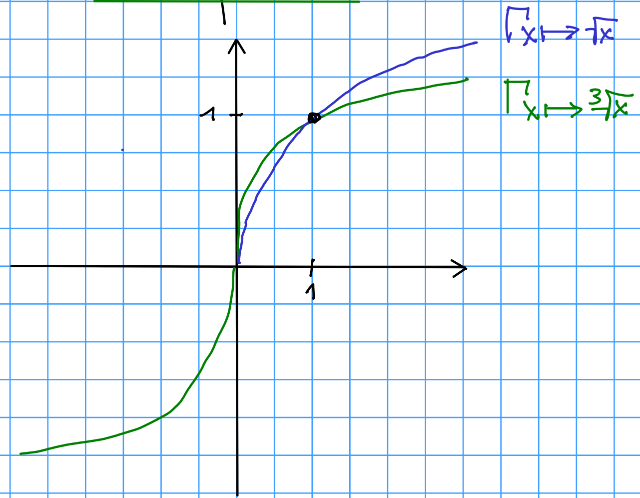
(b) $\log_a : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ stetig nach (a), Kor. 4.11(b) und Satz 6.9.

14.6.2017

(c) Die n-te Wurzel $\mathbb{R}_{(\geq 0)} \to \mathbb{R}_{(\geq 0)}, x \mapsto \sqrt[n]{x}$, für n (un)gerade, ist nach Satz 6.9. als Umkehrfunktion (siehe Kor. und Def. 0.3) der nach Bsp. 6.2(a) stetigen Funktion $\mathbb{R}_{(\geq 0)} \to \mathbb{R}_{(\geq 0)}, x \mapsto x^n$, stetig.

Veranschaulichung: Graph der Potenz- und Wurzelfunktion.



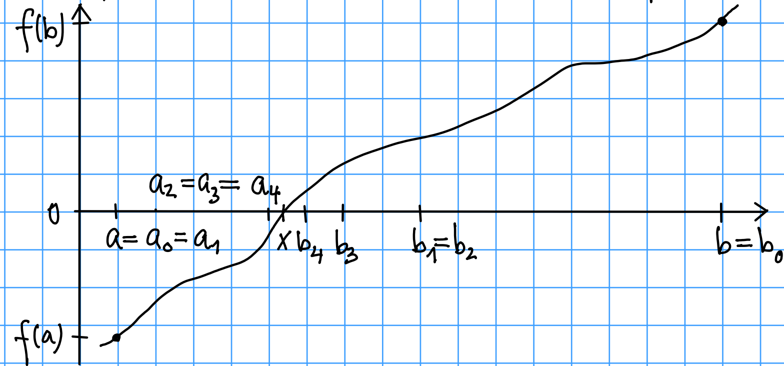


Def. 6.11 $x \in D$ heißt Nullstelle der Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ falls $f(x) = 0$.

Satz 6.12 (Nullstellensatz) Sei $\mathbb{R} \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ stetig und $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, mit (i) $[a,b] \subseteq D$ und (ii) $f(a) < 0 < f(b)$. Dann hat f Nullstelle $x \in (a,b)$.

Veranschaulichung:

Beweis durch „Intervalschachtelung."



Beweis: Konstruiere rekursiv Folgen $(a_n), (b_n) \in D^{\mathbb{N}}$ mit $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ und $f(a_n) < 0 \leq f(b_n)$.
Setze $a_0 := a$ und $b_0 := b$. Sei $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ der Mittelpunkt von $[a_n, b_n]$.
Falls $f(c_n) < 0$ setze $a_{n+1} := c_n$ und $b_{n+1} := b_n$, sonst $a_{n+1} := a_n$ und $b_{n+1} := c_n$. Nach Satz 1.13 konv. (a_n) und (b_n) mit $x := \lim b_n \overset{1.19}{=} \lim a_n + (b-a) \cdot \lim (\frac{1}{2})^n \overset{1.24}{=} \lim a_n$. Mit Lem. 1.17 und f stetig folgt $0 \leq \lim f(b_n) = f(x) = \lim f(a_n) \leq 0$ und somit $f(x) = 0$. □

Kor. 6.13 (Zwischenwertsatz) Sei $\mathbb{R} \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ stetig, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, mit $[a,b] \subseteq D$ und $y \in [f(a), f(b)]$ bzw. $[f(b), f(a)]$. Dann $\exists x \in [a,b] : f(x) = y$.
Beweis: Falls $y \in (f(a), f(b))$ wende Satz 6.12 auf $g(x) := f(x) - y$ an. □

Kor. 6.14 Jede Polynomfunktion $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von ungeradem Grad hat eine Nullstelle.
Beweis: Folgt aus Lem. 5.14.(c), Bsp. 6.2(a) und Satz 6.12 (Übung) □

Kor. 6.15 Für $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ stetig ist f injektiv $\Leftrightarrow$ f streng monoton.
Beweis: ($\Leftarrow$) nach Bem. I.4.14(a) ($\Rightarrow$) mit Satz 6.13 (Übung) □

Lem. 6.16 (ε-δ-Definition der Stetigkeit)

$\mathbb{R} \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ stetig $\Leftrightarrow$ $\forall a \in D: \forall \varepsilon > 0: \exists \underbrace{\delta}_{=\delta_{a,\varepsilon}} > 0 : \forall x \in D : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Beweis: Folgt aus Lem. 5.7

Def. 6.17 $\mathbb{R} \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ heißt <u>gleichmässig stetig</u> falls

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \underbrace{\delta}_{=\delta_\varepsilon} > 0 : \forall x, a \in D : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$

Bsp. 6.18 Betrachte $q, w : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $q(x) = x^2$, $w(x) = \sqrt{x}$.

Dann ist q streng monoton steigend, da für $x \geq a \geq 0$ gilt

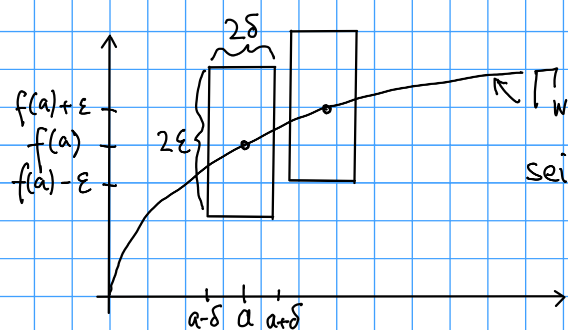
$x^2 = (x-a+a)^2 = (x-a)^2 + 2(x-a) \cdot a + a^2 \geq a^2.$

Dies gilt dann auch für $w = q^{-1}$ (siehe Bem. I.4.14 (b)). Es folgt:

$\sqrt{x} \geq \sqrt{a} \Rightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{a})^2 = x + a - 2\sqrt{x}\sqrt{a} \leq x - a = \sqrt{x-a}^{\,2} \Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{a} \leq \sqrt{x-a}$

(a) w ist <u>gleichmässig stetig</u>: Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta := \varepsilon^2$. Dann gilt für $x \geq a$

$|x-a| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{a}| \leq \sqrt{|x-a|} \leq \sqrt{\delta} = \varepsilon.$ <u>Veranschaulichung:</u>



Γ_w verlässt das <u>gleiche</u> (verschobene) ε-δ-Rechteck seitlich (vgl. Lem. 5.7) <u>unabhängig</u> von a.

(b) q ist nicht gleichmässig stetig (Übung).

Satz 6.19 Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig so auch gleichmässig stetig. □