II Abzählende Kombinatorik

1. Elementares Zählen

<u>Satz 1.1</u> (<u>Doppeltes Abzählen</u>) Sei $\square$ Relation zwischen endl. Mengen X, Y.

(i) Für $x \in X$, sei $p(x)$ die Anzahl aller $y \in Y$ mit $x \square y$.

(ii) Für $y \in Y$, sei $q(y)$ die Anzahl aller $x \in X$ mit $x \square y$.

Dann gilt: $\sum\limits_{x\in X} p(x) = \sum\limits_{y \in Y} q(y)$.

<u>Beweis</u>: Sei $R \subseteq X \times Y$ die zu $\square$ gehörige Teilmenge.
Nach Lem. I.3.5, def. $f := pr_X|_R : R \to X$ eine Zerlegung $\mathcal{J} = \{ f^{-1}(x) \mid x \in X \} \setminus \emptyset = \{ f^{-1}(x) \mid x \in f(R)\}$ von R. Für $x \in X$ ist $pr_Y|_{f^{-1}(x)} : f^{-1}(x) = \{(w,y) \in R \mid w = x\} \longrightarrow \{ y \in Y \mid x \square y\}$ bijektiv. Nach Satz I.3.22 somit $|f^{-1}(x)| = p(x)$ ($= 0$ falls $x \notin f(R)$). Mit Lem. I.2.19 (b) folgt $|R| = \sum\limits_{Z \in \mathcal{J}} |Z| = \sum\limits_{x \in f(R)} |f^{-1}(x)| = \sum\limits_{x\in X} p(x)$ und analog $|R| = \sum\limits_{y \in Y} q(y)$. $\square$

<u>Bsp. 1.2</u> Im Vorlesung sitzen 64 Studenten und m Studentinnen. Jeder Student kennt genau 5 Studentinnen, jede Studentin genau 8 Studenten. Wieviele Studentinnen sind es – vorausgesetzt „kennen" ist gegenseitig?
X Menge der Studenten, $|X| = 64$, Y Menge der Studentinnen, $|Y| =: m$, $R = \{(x,y) \in X \times Y \mid x$ und y kennen sich$\}$, $p(x) = 5$, $q(y) = 7$.
Somit $64 \cdot 5 = m \cdot 8 \Rightarrow m = 8 \cdot 5 = 40$. Es sind 40 Studentinnen.

<u>Satz 1.3</u> (<u>Schubfachprinzip</u>) Seien X, Y endl. Mengen mit $|X| > |Y|$ und $f: X \to Y$ eine Abb. Dann $\exists y \in Y: |f^{-1}(y)| \geq 2$.

<u>Beweis</u>: durch Kontraposition (siehe Satz I.1.5(j)):
$\forall y \in Y: |f^{-1}(y)| \leq 1 \Rightarrow f$ inj. $\overset{3.22}{\Longrightarrow} |X| \leq |Y|$. $\square$.

<u>Bsp. 1.4</u> Eine Bibliothek führt über 4000 Bücher, keines hat mehr als 1000 Seiten. Dann gibt es zwei Bücher mit gleicher Seitenzahl.
(X bzw. Y Menge der Bücher bzw. Seitenzahlen, $f(x) :=$ Seitenzahl von x.)

2. Binomialkoeffizienten

Def. 2.1. Seien $n, k \in \mathbb{N}$.

(a) Die *fallende Faktorielle* von n der Länge k ist def. durch

$$(n)_k := \begin{cases} 1, & \text{falls } k = 0, \\ 0, & \text{falls } k > n, \\ n \cdot (n-1)_{k-1} \ \left(= n \cdot (n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)\right), & \text{falls } 0 \neq k \leq n. \end{cases}$$

$n! := (n)_n$ heißt *Fakultät von n.*

(b) $\binom{n}{k} := \frac{(n)_k}{k!}$ (lies „n über k") heißt *Binomialkoeffizient.*

Bem. 2.2 (a) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$ für $k \leq n$.

(b) $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$

(c) $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$

Satz 2.3. (Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten) Für $n, k \in \mathbb{N}$ gilt

(a) $(n)_{k+1} = (n)_k\,(n-k)$ (b) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$

Beweis (a) Übung

(b) $\binom{n}{1} + \binom{n}{0} = \frac{n}{1} + 1 = \frac{n+1}{1} = \binom{n+1}{1}$, d.h. Beh. gilt für $k = 0$.

Für $k \neq 0$ gilt:

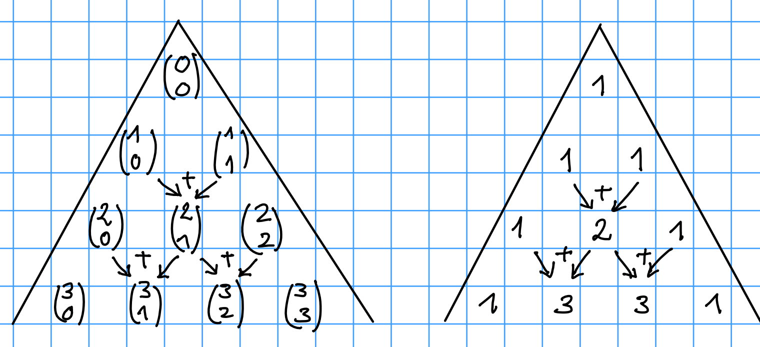
$$\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \frac{(n)_{k+1}}{(k+1)!} + \frac{(k+1)\,(n)_k}{(k+1)\,k!} \overset{(a)}{=} \frac{(n)_k}{(k+1)!}\,(n-k+k+1)$$

$$= \frac{(n+1)\,(n)_k}{(k+1)!} = \frac{(n+1)_{k+1}}{(k+1)!} = \binom{n+1}{k+1}$$

$\square$

Veranschaulichung:

„*Pascalsches Dreieck*"



Not. 2.4 Sei M endl. Menge, $k \in \mathbb{N}$. Schreibe $\mathcal{P}_k(M) := \{X \subseteq M \mid |X| = k\} \subseteq \mathcal{P}(M)$.

Satz 2.4 Sei M endl. Menge, $n := |M|$, $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a(n,k) := |\mathcal{P}_k(M)| = \binom{n}{k}$.

Beweis: Falls $k = 0$ ist $\mathcal{P}_k(M) = \varnothing$ und somit $a(n,k) = 1 = \binom{n}{k}$.
Falls $k \neq 0$ und $M = \varnothing$ ist $k > 0 = n$ und somit $a(n,k) = 0 = \binom{n}{k}$.
Sei nun $k \neq 0$ und $M \neq \varnothing$ und wähle $x \in M$.
Betrachte $\mathcal{P}_{k,x}(M) := \{X \in \mathcal{P}_k(M) \mid x \in X\}$ und $\mathcal{P}_k(M \setminus \{x\}) \subseteq \mathcal{P}_k(M)$ als Teilmenge.
Dann ist $\{\mathcal{P}_k(M\setminus\{x\}), \mathcal{P}_{k,x}(M)\}$ eine Zerlegung von $\mathcal{P}_k(M)$ und
die Abb. $\mathcal{P}_{k,x}(M) \longrightarrow \mathcal{P}_{k-1}(M\setminus\{x\})$, $X \longmapsto X\setminus\{x\}$, $Y \cup \{x\} \longleftarrow\!\shortmid Y$, ist bij.
Mit Lem. I.2.19 (b) und Satz I.3.22 folgt:
$a(n,k) = |\mathcal{P}_k(M)| = |\mathcal{P}_k(M\setminus\{x\})| + |\mathcal{P}_{k-1}(M\setminus\{x\})| = a(n-1,k) + a(n-1,k-1)$
Somit genügt $a(n,k)$ der Rekursionsformel für $\binom{n}{k}$ aus Satz 2.3 (b).
Es folgt $a(n,k) = \binom{n}{k}$ (mit geeigneter Abzählung der Menge $\{(n,k) \in \mathbb{N}^2 \mid n \geq k \geq 0\}$ und verallg. Rekursionssatz 5.4.) $\square$

Kor. 2.5 $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Beweis: Sei $M = \{1, \ldots, n\}$. Dann ist $\{\mathcal{P}_k(M) \mid \overbrace{k = 0, \ldots, n}^{\text{bedeutet } k \in \{0,\ldots,n\}}\}$ Zerl. von $\mathcal{P}(M)$.
Mit Lem. I.2.19 und Satz 2.4. folgt: $2^n = |\mathcal{P}(M)| = \sum_{k=0}^{n} |\mathcal{P}_k(M)| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$. $\square$

Kor. 2.6 $\binom{m+n}{k} = \sum_{i+j=k} \binom{m}{i}\binom{n}{j} := \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$.

Beweis: Sei $M = \{1, \ldots, m\}$, $N = \{m+1, \ldots, m+n\} \subseteq \mathbb{N}$. Dann gilt
$|M| = m$, $|N| = n$, $|M \dot\cup N| = m+n$ und $\mathcal{P}_k(M \dot\cup N)$ hat die Zerlegung
$\{\mathcal{P}_{ij} \mid i+j = k\}$ wobei $\mathcal{P}_{ij} := \{X \dot\cup Y \mid X \subseteq M, Y \subseteq N, |X| = i, |Y| = j\}$ und
$\mathcal{P}_{ij} \longrightarrow \mathcal{P}_i(M) \times \mathcal{P}_j(N)$, $Z \longmapsto (Z \cap M, Z \cap N)$, $X \dot\cup Y \longleftarrow\!\shortmid (X,Y)$, bijektiv.
Mit Satz 2.4, Lem. I.2.19(b) und I.2.16 folgt $\binom{m+n}{k} = |\mathcal{P}_k(M \dot\cup N)|$
$= \sum_{i+j=k} |\mathcal{P}_{ij}| = \sum_{i+j=k} |\mathcal{P}_i(M) \times \mathcal{P}_j(N)| = \sum_{i+j=k} |\mathcal{P}_i(M)| \cdot |\mathcal{P}_j(N)| = \sum_{i+j=k} \binom{m}{i} \cdot \binom{n}{j}$. $\square$

Kor. 2.6 (Binomischer Lehrsatz) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $(x+y)^n = \sum_{k+\ell=n} \binom{n}{k} x^k y^\ell$.

Beweis: Beim Ausmultiplizieren von $(x+y)^n$ erhält man einen Summand $x^k y^\ell$, $k+\ell=n$, wenn man aus k der n Faktoren x und aus den restlichen ℓ y auswählt. Dies entspricht der Wahl einer k-elem. Menge von $\{1, \dots, n\}$, d.h. eines Elements von $\mathcal{P}_k(\{1, \dots, n\})$. Nach Satz 2.4 kommen also genau $\binom{n}{k}$ solche Summanden vor. □

Bem. 2.7 Ausmultiplizieren von $(1+t)^{m+n} = (1+t)^m (1+t)^n$ und Koeffizientenvergleich liefert 2.5 als Folgerung aus 2.6.

Def. 2.8. Seien $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$, $n := k_1 + \dots + k_m$. Dann heißt
$$\binom{n}{k_1 \cdots k_m} := \frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_m!}$$
ein Multinomialkoeffizient

Bem. 2.9. Binomial- ist Spezialfall $m=2$ von Multinomialkoeffizient:
$$k := k_1 \Rightarrow k_2 = n-k \Rightarrow \binom{n}{k_1 \; k_2} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \overset{2.2.(a)}{=} \binom{n}{k}.$$

Satz 2.10 (Verallg. Binomischer Lehrsatz) Für $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$, $m \geq 2$, gilt
$$(x_1 + \dots + x_m)^n = \sum_{k_1 + \dots + k_m = n} \binom{n}{k_1 \dots k_m} x_1^{k_1} \cdots x_m^{k_m}.$$
□

3. Auswahl aus einer Menge

Viele kombinatorische Zählprobleme führen auf das Zählen der Auswählmöglichkeiten von k Elementen aus einer n-elem. Menge M. Man unterscheidet dabei ob

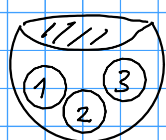
(a) die gewählten Elemente geordnet oder ungeordnet sind und ob

(b) mehrfache oder nur einfache Auswahl jedes Elements erlaubt ist.

Urnenmodell: Man zieht k Bälle aus Urne mit Bällen 1 2 3 ... n.

Art der Auswahl	Umsetzung im Modell
geordnet ein- bzw. mehrfach	k-mal. Ziehen eines Balls ohne bzw. mit Zurücklegen
ungeordnet ein- bzw. mehrfach	1-mal. Ziehen von k Bällen bzw. k-mal. Ziehen eines Balls mit Zurücklegen mit abschließendem Ordnen der gezogenen Zahlen

Bsp. $n = 3$, $k = 2$.



i j stellt eine Auswahlmöglichkeit dar.

Möglichkeiten	geordnet	ungeordnet
einfach	1 2 | 1 3 | 2 3 2 1 | 3 1 | 3 2	1 2 | 1 3 | 2 3
mehrfach	1 2 | 1 3 | 2 3 2 1 | 3 1 | 3 2 1 1 | 2 2 | 3 3	1 2 | 1 3 | 2 3 1 1 | 2 2 | 3 3

Anzahl	geord.	ungeord.
einf.	6	3
mehrf.	9	6

Mathematisch entspricht

geord. mehrf. bzw. ungeord. einf. der Auswahl eines Elements von

M^k bzw. $\mathcal{P}_k(M)$ (d.h. k-Tupel bzw. k-elem. Teilmengen) mit

$|M^k| = n^k$ bzw. $|\mathcal{P}_k(M)| = \binom{n}{k}$ Möglichkeiten nach

Lem. I.2.16 bzw. Satz 2.4.

11.5.2017

Def. 3.1 Eine endl. Menge A von Symbolen nennt man ein <u>Alphabet</u>. Für $k \in \mathbb{N}$ heißen Elemente von A^k <u>Wörter</u> der Länge k über A. Einziges Element von A^0 ist das <u>leere Wort</u>. Schreibe $a_1 a_2 \cdots a_k$ für $(a_1, a_2, \dots, a_k) \in A^k$.

Bsp. 3.2 Für $n := |A|$ gibt es genau n^k Wörter der Länge k, z.B. $A = \{a, b, c\}$, $A^2 = \{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}$.

Satz 3.3 Die Anzahl der Möglichkeiten aus einer n-elem. Menge M k viele Elemente auszuwählen ist durch folgende Tabelle gegeben.

	geordnet	ungeordnet
einfach	$(n)_k$	$\binom{n}{k}$
mehrfach	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$

Beweis: Nach den Vorbemerkungen bleibt noch zu betrachten:

(a) <u>geordnet einfach</u>: Man hat

n Möglichkeiten bei 1. Auswahl,
$n-1$ Möglichkeiten bei 2. Auswahl,
$\vdots$
$n-k+1$ Möglichkeiten bei k. Auswahl.

Dies ergibt insgesamt $n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = (n)_k$ Möglichkeiten.

(b) <u>ungeordnet mehrfach</u>: OBdA $M = \{1, 2, \dots, n\}$. Für z.B. $n = 5$, $k = 6$ schreibe eine Auswahl als Wort über $\{\bullet, |\}$ der Länge 10:

$$5\,1\,3\,2\,3\,1 \longleftrightarrow 1\,1\,|\,2\,|\,3\,3\,|\;|\,5 \longleftrightarrow \bullet\bullet|\bullet|\bullet\bullet||\bullet \in \{\bullet, |\}^{10}$$

keine 4

$$\begin{array}{rl} & 4 = n-1 \text{ Trennstriche} \\ + & 6 = k \text{ Punkte} \\ \hline & 10 = n+k-1 \text{ Stellen} \end{array}$$

Allgemein:

$$\underbrace{\overbrace{\bullet \cdots \bullet}^{\text{Zahl der 1er}} \,|\, \overbrace{\bullet \cdots \bullet}^{\text{2er}} \,|\, \overbrace{\bullet \cdots \bullet}^{\text{3er}} \,|\, \cdots \,|\, \overbrace{\bullet \cdots \bullet}^{n\text{er}}}_{n+k-1 \text{ Stellen mit } k \text{ Punkten und } n-1 \text{ Strichen}}$$

Auswahl entspricht der ungeordneten einfachen Auswahl von k aus $n-k-1$ Stellen mit Punkt. Es gibt also $\binom{n-k-1}{k} = \binom{n-k-1}{n-1}$ Möglichkeiten. $\square$

Bsp. 3.4 Anzahl der Möglichkeiten ...

(a) ... 3 Farben anzuordnen (geord. einf.): $(3)_3 = 3! = 6$

RGB, RBG, GRB, GBR, BRG, BGR

(b) ... 2 Autos in 5 Parklücken zu parken (geord. einf.): $(5)_2 = 5\cdot 4 = 20$

(c) ... einen Lottoschein „6 aus 49" auszufüllen (ungeord. einf.):

$$\binom{49}{6} = \frac{49\cdot 48\cdot \ldots \cdot 44}{6\cdot 5\cdot \ldots \cdot 1} = 13\,983\,816$$

(d) ... für 5 Krähen (nicht unterscheidbar) sich auf 3 Bäume zu setzen (ungeord. mehrf.): $\binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = \frac{7\cdot 6}{2\cdot 1} = 7\cdot 3 = 21$.

Kor. 3.5 Seien X, Y endl. Mengen mit $|X| =: k$, $|Y| =: n$.
Dann gilt $|\{f \in Y^X \mid f \text{ inj.}\}| = (n)_k$.

Beweis: OBdA. $X = \{1, \ldots, k\} \subseteq \mathbb{N}$. Jedes inj. f entsteht durch Wahl von $f(i) \in Y$ für $i = 1, \ldots, k$ ohne Wiederholungen.
Die Auswahl ist daher einfach geordnet und Beh. folgt aus Satz 3.3. □

Bsp. 3.6 Ein Paar bekommt Fünflinge, 2 Jungen und 3 Mädchen. Ihnen fallen 5 Jungennamen und 10 Mädchennamen ein. Eine Namensgebung ist ein Paar (2-Tupel) inj. Abb. von Kindern zu Namen.

Anzahl möglicher Namensgebungen:

$$|\{\{1,2\} \hookrightarrow \{1, \ldots, 5\}\} \times \{\{1,2,3\} \hookrightarrow \{1, \ldots, 10\}\}| = (5)_2 \cdot (10)_3 = 5\cdot 4\cdot 10\cdot 9\cdot 8$$

Anzahl möglicher Namensauswahlen (ohne Zuordnung zu Kindern): $\binom{5}{2}\cdot\binom{10}{3} = 5\cdot 2\cdot 10\cdot 3\cdot 4$

Um wie $\binom{n}{k}$ mit $\mathcal{P}_k(M)$ auch $\binom{n+k-1}{k}$ mit einer Menge zu assoziieren verallgemeinern wir Mengen, um Elemente mit Vielfachheit zuzulassen.

<u>Def. 3.7</u> Eine <u>Multimenge</u> $N = (M, \#_N)$ besteht aus einer <u>Grundmenge</u> M und einer <u>Vielfachheit</u> $\# = \#_N : M \to \mathbb{N}$. Mit $\#_M(x) := 1$ wird jede Menge M zu einer Multimenge $M = (M, \#_M)$. Die <u>reduzierte Grundmenge</u> oder <u>Träger</u> von N ist die Menge $\operatorname{supp}(N) := \{x \in M \mid \#_N(x) \neq 0\}$.

Die <u>Mächtigkeit</u> von N ist $|N| := \begin{cases} \sum\limits_{x \in \operatorname{supp}(N)} \#_N(x), & \text{falls } |\operatorname{supp}(N)| < \infty, \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$

$Y = (X, \#_Y)$ heißt <u>Teil(multi)menge</u> von N falls $\operatorname{supp}(Y) \subseteq \operatorname{supp}(N)$ und $\forall x \in \operatorname{supp}(Y): \#_Y(x) \leq \#_N(x)$, schreibe $Y \subseteq N$. Dies def. eine Halbordnung auf $\mathcal{M}(M) := \{(M, \#) \mid \# : M \to \mathbb{N}\} \supseteq \{N \in \mathcal{M}(M) \mid |N| = k\} =: \mathcal{M}_k(M)$.

<u>Bsp. 3.8.</u> (Primfaktorzerlegung als Multimenge) Für $n \in \mathbb{Z}$ def. die Primfaktorzerlegung $n = p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m}$ (wobei $\forall i,j: p_i \in \mathbb{P},\ i \neq j \Rightarrow p_i \neq p_j$) eine Multimenge $F_n := (\mathbb{P}, \#_n)$ auf der Menge $\mathbb{P}$ der Primzahlen mit $\#_n$ def. durch:

p	p_1	p_2	$\cdots$	p_m	sonst
$\#_n(p)$	k_1	k_2	$\cdots$	k_m	0

Es gilt $m \mid n \Leftrightarrow F_m \subseteq F_n$.

Z.B. $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$,
$21 = 3 \cdot 7$.

p	2	3	7	sonst
$\#_{84}(p)$	2	1	1	0
$\#_{21}(p)$	0	1	1	0

$F_{21} \subseteq F_{84}$

$\operatorname{supp}(F_{21}) = \{3, 7\}$

$\operatorname{supp}(F_{84}) = \{2, 3, 7\}$

<u>Kor. 3.9</u> Sei M endl. Menge, $n := |M|$, $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $|\mathcal{M}_k(M)| = \binom{n+k-1}{k}$.

<u>Beweis:</u> $N = (M, \#) \in \mathcal{M}_k(M)$ ist gegeben durch Wahl einer Vielfachheit $\# : M \to \mathbb{N}$ mit $|N| = \sum_{x \in M} \#(x) = k$. Man wählt dazu ungeordnet mehrfach k Elemente von M, wobei $\#(x)$ bei jeder Wahl von $x \in M$ um 1 erhöht wird. Beh. folgt aus Satz 3.3. $\square$

Satz 3.10 Für n Objekte von m Sorten, je k_i der i-ten Sorte (nicht unterscheidbar), gibt es genau $\binom{n}{k_1 \cdots k_m}$ Anordnungsmöglichkeiten. $\square$

Def. 3.11 Sei A Alphabet, $\#: A \to \mathbb{N}$ Vielfachheit, $n := |(A,\#)|$.
Sei $\mathcal{W}(A,\#) := \{ w \in A^n \mid \forall a \in A : \#(a) = |\{ i \mid w_i = a \}| \}$ die Menge aller Wörter über A in denen jedes $a \in A$ genau $\#(a)$ mal vorkommt.

Kor. 3.12 Sei $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$, $\#: A \to \mathbb{N}$, $n := |(A,\#)|$. Dann gilt:

$$|\mathcal{W}(A,\#)| = \binom{n}{\#(a_1) \cdots \#(a_m)}.$$ $\square$

Bsp. 3.13

(a) $A = \{ \bullet, | \}$, $\#(\bullet) = k$, $\#(|) = n-1$ (siehe Satz 3.3, Beweis (b)).

$$\Rightarrow |\mathcal{W}(A,\#)| = \binom{n-1+k}{k \quad n-1} \overset{2.9}{=} \binom{n+k-1}{k}.$$

(b) $A = \{a, b, c\}$, $\#(a) = 1 = \#(b)$, $\#(c) = 2$.

$$\Rightarrow \mathcal{W}(A,\#) = \{ \begin{matrix} abcc, & bacc, & cabc, & cbca, \\ acbc, & bcac, & cacb, & ccab, \\ accb, & bcca, & cbac, & ccba \end{matrix} \}$$

$$\Rightarrow |\mathcal{W}(A,\#)| = 12 = 4 \cdot 3 = \frac{4!}{1!\,1!\,2!} = \binom{4}{1 \quad 1 \quad 2}.$$

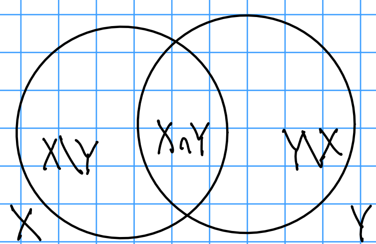
4. Ein- und Ausschließen.

Sei M endl., $\emptyset \neq X, Y \subseteq M$ Teilmengen. Die Zerlegungen

- $\{X \setminus Y, X \cap Y, Y \setminus X\}$ von $X \cup Y$
- $\{X \setminus Y, X \cap Y\}$ von X und
- $\{X \cap Y, Y \setminus X\}$ von Y liefern mit Lem. I.2.19.(b)

$$|X \cup Y| = |X \setminus Y| + |X \cap Y| + |Y \setminus X| + |X \cap Y| - |X \cap Y|$$
$$= |X| + |Y| - |X \cap Y| \quad (*)$$

Veranschaulichung:



Bei $|X| + |Y|$ werden Elemente von $X \cap Y$ doppelt gezählt und müssen wieder abgezogen werden.

Iterieren liefert folgendes Zählprinzip. 15.5.2017

Satz 4.1 (Siebformel)

Sei M endl. Menge, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $X_1, \dots, X_n \subseteq M$ Teilmengen.

Dann gilt $|X_1 \cup \dots \cup X_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_k} |X_{i_1} \cap \dots \cap X_{i_k}|$

Beweis: Induktion über $n \geq 1$.

Beh. trivial für $n = 1$ und reduziert sich auf $(*)$ für $n = 2$.

Sei nun $n \geq 3$ und die Beh. gelte für $n-1$. Dann gilt:

$$|X_1 \cup \dots \cup X_n| = |(X_1 \cup \dots \cup X_{n-1}) \cup X_n|$$

$$\overset{(*)}{=} |X_1 \cup \dots \cup X_{n-1}| + |X_n| - |\underbrace{(X_1 \cup \dots \cup X_{n-1}) \cap X_n}_{\overset{\text{I.2.11.(g)}}{=} (X_1 \cap X_n) \cup \dots \cup (X_{n-1} \cap X_n)}|$$

$$\overset{\text{I.V.}}{=} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_k} |X_{i_1} \cap \dots \cap X_{i_k}| + |X_n| + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_j} |\underbrace{(X_{i_1} \cap X_n) \cap \dots \cap (X_{i_j} \cap X_n)}_{= X_{i_1} \cap \dots \cap X_{i_j} \cap \underbrace{X_n}_{i_k = n}}|$$

Indexverschiebung $j = k-1$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_k < n} |X_{i_1} \cap \dots \cap X_{i_k}| + |X_n| + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_{k-1} \leq i_k = n} |X_{i_1} \cap \dots \cap X_{i_{k-1}} \cap X_{i_k}|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_k} |X_{i_1} \cap \dots \cap X_{i_k}|$$

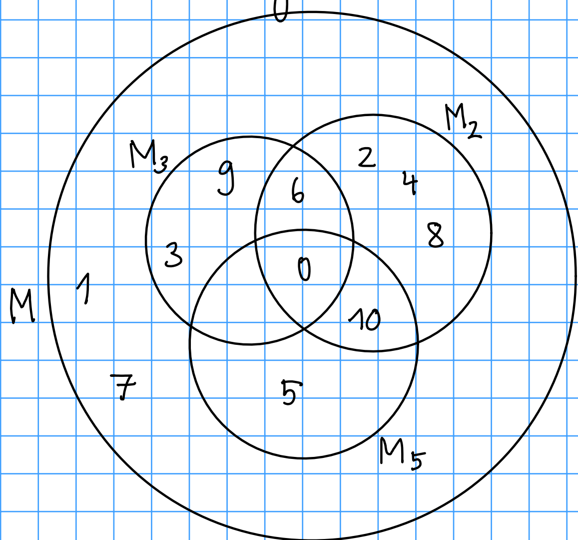
Summand für $k = 1$. $\square$

<u>Bsp. 4.2</u> Sei $M = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$, $M_k := \{x \in M \mid k \mid x\}$.

Dann ist $M_2 \cup M_3 \cup M_5$ die Menge aller Zahlen zwischen 0 und 10, die von 2, 3, oder 5 geteilt werden.

Satz 4.1 besagt

$$
\begin{aligned}
|M_2 \cup M_3 \cup M_5| &= |M_2| + |M_3| + |M_5| \\
&\quad - |M_2 \cap M_3| - |M_2 \cap M_5| - |M_3 \cap M_5| \\
&\quad + |M_2 \cap M_3 \cap M_5| \\
&= 6 + 4 + 3 \\
&\quad - 2 - 2 - 1 \\
&\quad + 1 \\
&= 9
\end{aligned}
$$



5. Zerlegungen

Def. 5.1: Sei M Menge, $\mathcal{Z}(M)$ die Menge aller Zerlegungen von M. Für $k \in \mathbb{N}$, sei $\mathcal{Z}_k(M) = \{ \mathfrak{Z} \in \mathcal{Z}(M) \mid |\mathfrak{Z}| = k \}$ die Menge der Zerlegungen von M in k Teilmengen. Mit $n := |M| < \infty$ nennt man $S(n,k) := \left\{ {n \atop k} \right\} := |\mathcal{Z}_k(M)|$ Stirlingzahlen zweiter Art.

Bem. 5.2: (a) $S(n,1) = 1$ falls $n \neq 0$ da $\mathcal{Z}_1(M) = \{\{M\}\}$.

(b) $S(n,n) = 1$ da $\mathcal{Z}_n(\{1,\dots,n\}) = \{\{1\},\{2\},\dots,\{n\}\}$ und $\mathcal{Z}_0(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

(c) $S(n,k) = 0$ falls $k > n$ oder $k = 0 < n$.

Bsp. 5.3

Sei $M = \{a,b,c,d\}$.

Wir schreiben $a|b|cd$ für $\{\{a\},\{b\},\{c,d\}\} \in \mathcal{Z}_3(M)$.

k	1	2	3	4
$\mathcal{Z}_k(M)$	$abcd$	$a\|bcd$ $b\|acd$ $c\|abd$ $d\|abc$ $ab\|cd$ $ac\|bd$ $ad\|bc$	$a\|b\|cd$ $a\|c\|bd$ $a\|d\|bc$ $b\|c\|ad$ $b\|d\|ac$ $c\|d\|ab$	$a\|b\|c\|d$
$S(4,k)$	1	7	6	1

Satz 5.4. (Rekursionsformel für Stirlingzahlen zweiter Art) Für $n,k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt: $S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k)$.

Beweis: Für $k = 1$ oder $k > n$ gilt Beh. nach Bem. 5.2. Sei also $n = |M| \geq 2$.

Wähle $z \in M$ und zerlege $\mathcal{Z}_k(M)$ in

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_{k,z}(M) := \{ \mathfrak{Z} \in \mathcal{Z}_k(M) \mid \{z\} \in \mathfrak{Z} \} & \longrightarrow & \mathcal{Z}_{k-1}(M \setminus \{z\}) \text{ bij.} \\ \mathfrak{Z} & \longmapsto & \mathfrak{Z} \setminus \{\{z\}\} \\ \mathfrak{J} \cup \{\{z\}\} & \longleftarrow\!\shortmid & \mathfrak{J} \end{array}$$

und

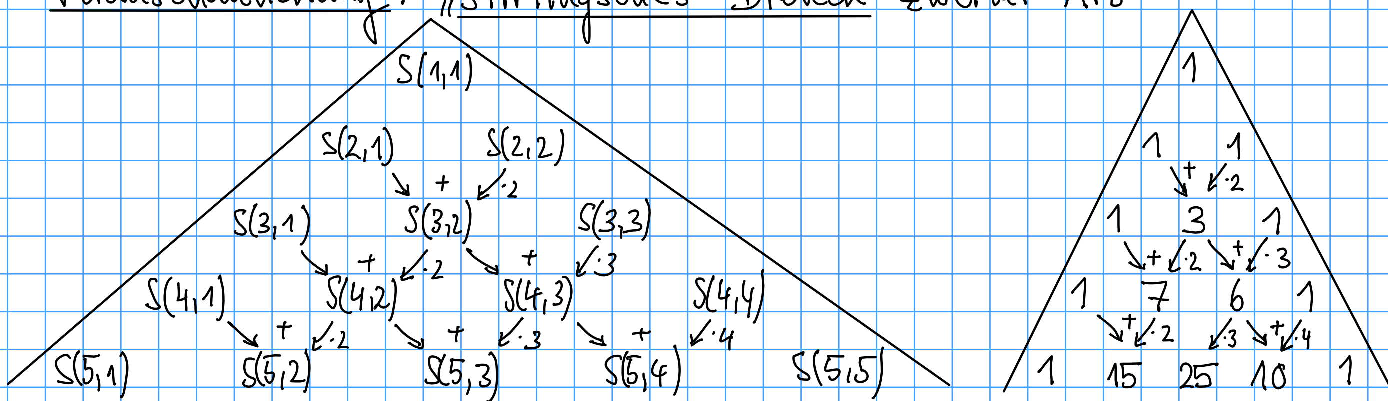
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_k(M) \setminus \mathcal{Z}_{k,z}(M) & \longrightarrow & (\mathcal{Z}_k(M \setminus \{z\})) \times \{1,\dots,k\} \text{ bij.} \\ \{X_1,\dots,X_j \cup \{z\},\dots,X_k\} & \longleftarrow\!\shortmid & (\{X_1,\dots,X_k\}, j) \\ \underbrace{\mathfrak{Z} = \{X_1,\dots,\underset{z}{\underset{\cup\!\!\!\!\shortmid}{X_j}},\dots,X_k\}}_{\text{geeignet geordnet}} & \longmapsto & (\{X_1,\dots,\underbrace{X_j \setminus \{z\}}_{\neq \emptyset \text{ da } \mathfrak{Z} \notin \mathcal{Z}_{k,z}(M)},\dots,X_n\}, j) \end{array}$$

Mit Lem. I.2.19 (b) und Satz I.3.22 folgt

$$S(n,k) = |Z_k(M)| = |Z_{k,z}(M)| + |Z_k(M)\setminus Z_{k,z}(M)|$$
$$= |Z_{k-1}(M\setminus\{z\})| + |Z_k(M\setminus\{z\})|\cdot|\{1,\dots,k\}|$$
$$= S(n-1,k-1) + k\cdot S(n-1,k). \qquad \square$$

<u>Bsp. 5.5</u> $S(4,2) = S(3,1) + 2\cdot S(3,2) = 1 + 2\cdot\big(\underbrace{S(2,1)}_{=1} + 2\cdot\underbrace{S(2,2)}_{=1}\big) = 7$
(siehe Bsp. 5.3)

<u>Veranschaulichung</u>: „<u>Stirlingsches Dreieck</u>" zweiter Art



<u>Satz 5.6.</u> Für $n,k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ gilt $S(n,k) = \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}S(i,k-1)$.

<u>Beweis</u>: Sei $z\in M$ und zerlege $Z_k(M)$ in

$Z_{k,N}(M) = \{\mathcal{S}\in Z_k(M) \mid \forall X\in\mathcal{S} : z\in X \Rightarrow X=N\} \longrightarrow Z_{k-1}(M\setminus N)$ bij.

wobei $z\in N\subseteq M$.

$$\mathcal{S} \longmapsto \mathcal{S}\setminus\{N\}$$
$$\mathcal{T}\cup\{N\} \longleftarrow\!\!\shortmid\ \mathcal{T}$$

Mit Lem. I.2.19.(b) folgt:

$$S(n,k) = |Z_k(M)| = \sum_{z\in N\subseteq M}' |Z_{k,N}(M)| = \sum_{i=0}^{n-1}\ \sum_{\substack{z\in N\subseteq M\\ |N|=n-i}}' \underbrace{|Z_{k-1}(M\setminus N)|}_{=S(i,k-1)\text{ unabhängig von }N}$$

$|N|=n-i \Rightarrow |M\setminus N| = i$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} S(i,k-1)\,\underbrace{|\{N \mid z\in N\subseteq M,\ |N|=n-i\}|}$$

ungeord. einf. Auswahl $\longrightarrow = \binom{n-1}{n-i-1} = \binom{n-1}{i}$

von $n-i-1 = |N\setminus\{z\}|$ aus $n-1 = |M\setminus\{z\}|$ Elementen von M. $\square$

Satz 5.7 Seien X, Y endl. Mengen mit $|X| =: n$, $|Y| =: k$.
Dann gilt $|\{f \in Y^X \mid f \text{ surj.}\}| = k!\, S(n,k)$.

Beweis: Nach Lem. 3.5 def. jedes surj. $f: X \twoheadrightarrow Y$ eine Zerlegung
$$\mathcal{S}_f = \{f^{-1}(y) \mid y \in Y\} \in Z_k(X)$$
und eine Bijektion $b_f: Y \to \mathcal{S}_f$, $y \mapsto f^{-1}(y)$, $y \in f(Z) \mapsfrom Z$.
Sind umgekehrt $\mathcal{S} \in Z_k(X)$ und $b: Y \to \mathcal{S}$ bij. gegeben, def.
$$f_{\mathcal{S},b}: X \twoheadrightarrow Y,\ x \mapsto b^{-1}(W),\ x \in W \in \mathcal{S}.$$
Wegen $|\mathcal{S}| = Y$ können wir nach Satz I.3.22 $\mathcal{S} = Y$ und $b: Y \to Y$ annehmen. Wir erhalten eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc}
f & \longmapsto & (\mathcal{S}_f, b_f) \\
\{f \in Y^X \mid f \text{ surj}\} & \underset{\Psi}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} & Z_k(X) \times \{b \in Y^Y \mid b \text{ bij}\} \\
f_{\mathcal{S},b} & \longmapsfrom & (\mathcal{S}, b)
\end{array}$$

denn:

(a) Für $y = f_{\mathcal{S},b}(x)$ gilt $b(y) = \underset{\mathcal{S}}{\overset{}{W}} \ni x$, $W \in \mathcal{S}$, und daher $f_{\mathcal{S},b}^{-1}(y) = W$. Hieraus folgt
$\mathcal{S}_{f_{\mathcal{S},b}} = \{f_{\mathcal{S},b}^{-1}(y) \mid y \in Y\} = \mathcal{S}$ sowie $b_{f_{\mathcal{S},b}}(y) = f_{\mathcal{S},b}^{-1}(y) = W = b(y)$.
Also gilt $\Phi \circ \Psi(\mathcal{S}, b) = \Phi(f_{\mathcal{S},b}) = (\mathcal{S}_{f_{\mathcal{S},b}}, b_{f_{\mathcal{S},b}}) = (\mathcal{S}, b)$ und somit $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$.

(b) $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$ Übung.

Mit Satz I.3.22, Lem. I.2.16, Kor. I.3.23 und Kor. 3.5 folgt
$$|\{f \in Y^X \mid f \text{ surj.}\}| = |Z_k(X)| \cdot |\{b \in Y^Y \mid b \text{ inj.}\}| = S(n,k) \cdot k! \qquad \square$$

Bsp. 5.8 Sei $X := \{a,b,c,d\}$, $Y := \{1,2,3\}$, $n = 4$, $k = 3$.

Idee: $a|b|cd \in Z_3(X)$, mit $a \mapsto 1$, $b \mapsto 2$, $cd \mapsto 3$. Gleiche Zerlegung hat aber $6 = 3! = k!$ verschiedene Darstellungen:

$a|b|cd$, $a|cd|b$, $b|a|cd$, $b|cd|a$, $cd|a|b$, $cd|b|a$

und jede liefert eine andere Surjektion.

6. Vertauschungen

Def. 6.1 (Symmetrische Gruppe) Sei $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ und $N := N_n := \{1,\dots,n\}$.
Die Menge $S_n := \{\sigma \mid \sigma : N \to N \text{ bij}\}$ mit der „Verknüpfung"
$\circ : S_n \times S_n \longmapsto S_n,\ (\sigma,\tau) \longmapsto \sigma\circ\tau$ (wohldef. nach Lem. I.3.15(c))
heißt Symmetrische Gruppe oder Permutationsgruppe vom Grad n,
ihre Elemente Vertauschungen oder Permutationen.
Man stellt $\sigma \in S_n$ tabellarisch als $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & & n-1 & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n-1) & \sigma(n)\end{pmatrix}$ dar
und schreibt auch $\sigma\tau$ statt $\sigma\circ\tau$.

Bsp. 6.2 $n=3$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \sigma(1)=3,\ \sigma(2)=2,\ \sigma(3)=1.$

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix} \right\},\quad |S_3| = 6 = 3!$$

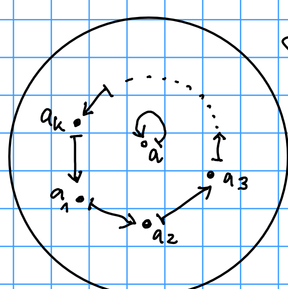
$$\begin{pmatrix} 1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} 1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}.$$

18.5.2017

Def. 6.3 Seien $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ und $a_1,\dots,a_m \in N$. Def. den m-Zykel
$\sigma =: (a_1\, a_2\, \cdots\, a_m) \in S_n$ durch

$$\sigma(a) := \begin{cases} a, & \text{falls } \forall i: \quad a \neq a_i, \\ a_{i+1}, & \text{falls } \exists i<m: a = a_i, \\ a_1, & \text{falls} \qquad a = a_m. \end{cases}$$

Veranschaulichung:
($\forall i: a \neq a_i$)



Wir nennen $\operatorname{supp}(\sigma) := \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \subseteq N$
den Träger von σ.

2-Zykel $\sigma = (a_1\, a_2)$ heißen eine Transpositionen. Man nennt die Zykel
$\sigma_1,\dots,\sigma_k$ disjunkt falls $\forall i,j \in \{1,\dots,k\}: i \neq j \Rightarrow \operatorname{supp}(\sigma_i)\cap\operatorname{supp}(\sigma_j) = \emptyset$.

Bsp. 6.4: (a) $\sigma = (1\ 2\ 3) \in S_5 \Rightarrow \sigma = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5\\2&3&1&4&5\end{pmatrix}$.

(b) $(1\,3)(1\,2) = (1\,2\,3) = (2\,3\,1) = (3\,1\,2)$
 $(1\,2)(1\,3) = (1\,3\,2) = (1\,2\,3)^{-1}$ ($(1\,2\,3) \neq (1\,3\,2)$)

Beachte $(12), (13)$ nicht disjunkt
da $\underbrace{\operatorname{supp}(12)}_{=\{1,2\}} \cap \underbrace{\operatorname{supp}(13)}_{=\{1,3\}} = \{1\} \neq \emptyset$

(c) $(2\,5)(1\,3\,4) = (1\,3\,4)(2\,5)$
Beachte $(2,5), (1\,3\,4)$ disjunkt.

Bem. 6.5 (a) $(a) = \mathrm{id}_N =: ()$

(b) $(a_1\ a_2 \cdots a_{m-1}\ a_m)^{-1} = (a_m\ a_{m-1} \cdots a_2\ a_1)$

(c) $(a_1\ a_2 \cdots a_{m-1}\ a_m) = (a_2\ a_3 \cdots a_{m-1}\ a_m\ a_1) = (a_m\ a_1\ a_2 \cdots a_{m-2}\ a_{m-1})$.

(d) $\sigma\tau = \tau\sigma$ falls σ, τ disjunkte Zykel

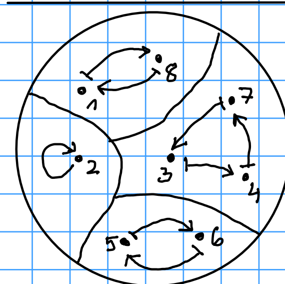
(e) $(a_1\ a_2 \cdots a_m) = (a_1 a_2)(a_2 a_3) \cdots (a_{j-1}\ a_j)(a_j\ a_{j+1}) \cdots (a_{m-1}\ a_m)$.

Satz 6.6 Jede Vertauschung $\sigma \in S_n$ ist Verkettung $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \ldots \circ \sigma_k$ bis auf Reihenfolge eindeutiger disjunkter Zykel $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in S_n$ mit $\mathcal{S}_\sigma := \{\mathrm{supp}(\sigma_i) \mid i = 1, \ldots, k\} \in \mathcal{Z}(N_n) =: Z_n$.

Beweis: siehe Vorlesung „Algebraische Strukturen". □

Bsp. 6.7 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 4 & 7 & 6 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\,8)\underline{(2)}(3\,4\,7)(5\,6)$ disjunkte Zykelzerlegung.

Veranschaulichung:



Der 1-Zykel $(2) = \mathrm{id}_N$ ist redundant im Zykelzerl. von σ jedoch nötig für Zerl. $\mathcal{S}_\sigma = \{\{1,8\}, \underline{\{2\}}, \{3,4,7\}, \{5,6\}\}$ von N.

Nach Bem. 6.5 (e) ist $(3\,4\,7) = (3\,4)(4\,7)$ und somit $\sigma = (1\,8)(3\,\underline{4})(\underline{4}\,7)(5\,6)$ nicht disjunkte Zerl. in Transpositionen.

Def. 6.8 Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $k \in \mathbb{N}$ nennt man die Anzahl $s(n,k) = \left[{n \atop k}\right]$ der $\sigma \in S_n$ mit $\mathcal{S}_\sigma \in Z_k(N_n) =: Z_{n,k}$ eine <u>Stirlingzahl erster Art</u>. Setze $s(0,0) := 1$.

Bem. 6.9 (a) $s(n,1) = (n-1)!$ Übung.

(b) $s(n,n) = 1$ für $n \in \mathbb{N}$, da $Z_{n,n} = \{\{\{i\} \mid i = 1, \ldots, n\}\} = \{\mathcal{S}_{()}\}$ wegen $() = (1) \cdots (n)$.

(c) $s(n,k) = 0$ falls $k > n$ oder $k = 0 < n$.

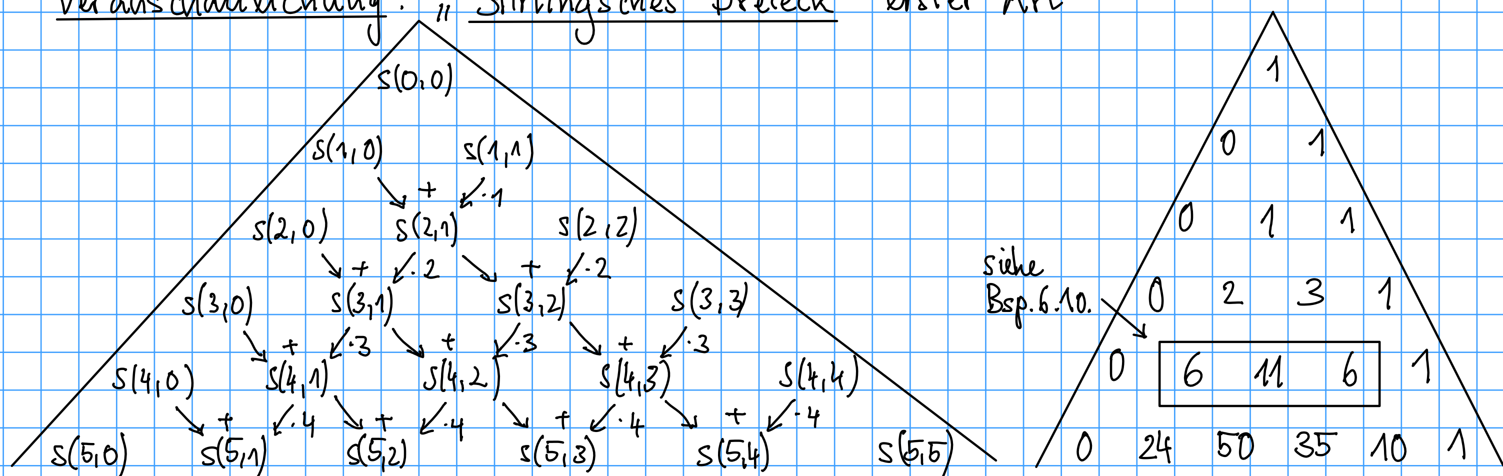
Bsp. 6.10

k	1	2	3
n = 4.	(1234), (1243),	(12)(34), (13)(24), (14)(32),	⋮
	(1324), (1342),	(123)(4), (234)(1), (341)(2), (412)(3)	
	(1423), (1432),	(432)(1), (321)(4), (214)(3), (143)(2)	
s(4,k)	6	11	6

Satz 6.11 Es gilt $|S_n| = n! = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)$. **Beweis:** Beh. ist trivial falls $n=0$. Sei $n \neq 0$. Nach I.Kor. 3.23 und Kor. 3.5 ist $|S_n| = |\{\sigma \in N^N \mid \sigma \text{ inj.}\}| = (n)_n = n!$. Die Abb. $\zeta = \zeta_n : S_n \to \mathcal{Z}_n$, $\sigma \longmapsto \wp_\sigma$, und die Zerl. $\mathcal{T} := \{\mathcal{Z}_{n,k} \mid k = 1, \dots, n\}$ von $\mathcal{Z}_n$ liefern nach Lem. I.3.5 eine Zerl. $\zeta^{-1}(\mathcal{T}) = \{\zeta^{-1}(\mathcal{Z}_{n,k}) \mid k = 1, \dots, n\}$ von S_n mit $|\zeta^{-1}(\mathcal{Z}_{n,k})| = s(n,k)$. Mit Lem. I.2.19 (b) folgt die Beh. □

Satz 6.12 (Rekursionsformel für Stirlingzahlen erster Art) Für $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt: $s(n,k) = s(n-1, k-1) + (n-1)\, s(n-1, k)$.

Veranschaulichung: „Stirlingsches Dreieck" erster Art



Beweis: Zerlege $\mathcal{Z}_{n,k}$ in

$\mathcal{Z}''_{n,k} := \{\wp \in \mathcal{Z}_{n,k} \mid \{n\} \in \wp\} \longrightarrow \mathcal{Z}_{n-1,k-1}$ bij. (siehe Satz 5.4, Beweis) und

$\mathcal{Z}'_{n,k} := \mathcal{Z}_{n,k} \setminus \mathcal{Z}''_{n,k}$. Nach Lem. I.3.5 zerlegt sich $\zeta_n^{-1}(\mathcal{Z}_{n,k})$ in

$\zeta_n^{-1}(\mathcal{Z}''_{n,k}) \to \zeta_{n-1}^{-1}(\mathcal{Z}_{n-1,k-1})$, $\sigma_1 \cdots \sigma_{k-1}(n) \longmapsto \sigma_1 \cdots \sigma_{k-1}$, bij. und

$\zeta_n^{-1}(\mathcal{Z}'_{n,k}) \longrightarrow \zeta_{n-1}^{-1}(\mathcal{Z}_{n-1,k}) \times N_{n-1}$ bij.

$$\sigma = (a_1 \cdots) \cdots (\cdots a_{j-1}\, n\, a_{j+1} \cdots) \cdots (\cdots a_n) \longmapsto \big((a_1 \cdots) \cdots (\cdots a_{j-1}\, a_{j+1} \cdots) \cdots (\cdots a_n),\ j \big)$$

wobei $\cdots(a_i \cdots a_{j-1}\, n)\cdots$ nicht vorkommt da $(a_i \cdots a_{j-1}\, n) = (n\, a_i \cdots a_{j-1})$ und falls $j < n$ durch $\cdots(a_i \cdots a_{j-1})(n \cdots)\cdots$ ersetzt wird. Da (n) in $\sigma \in \zeta^{-1}(\mathcal{Z}'_{n,k})$ nicht vorkommt, ist somit $j \in N_{n-1}$. Mit Lem. I.2.19 (b), Satz I.3.22 und Lem. I.2.16 folgt

$$\begin{aligned} s(n,k) = |\zeta_n^{-1}(\mathcal{Z}_{n,k})| &= |\zeta_{n-1}^{-1}(\mathcal{Z}_{n-1,k-1})| + |\zeta_{n-1}^{-1}(\mathcal{Z}_{n-1,k})| \cdot |N_{n-1}| \\ &= s(n-1,k-1) + (n-1) \cdot s(n-1,k). \end{aligned}$$ □

7 Zahlpartitionen

<u>Def. 7.1</u> Seien $n, k \in \mathbb{N}$. Die <u>Partitionszahl</u> $P(n,k)$ ist die Anzahl der (ungeordneten) Summenzerlegungen (<u>Zahlpartitionen</u>) $n = n_1 + \ldots + n_k$ mit k Summanden $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

<u>Bem. 7.2</u>

(a) $P(n,1) = 1$ da $n = n$ einzige Sum. zerl.

(b) $P(n,n) = 1$ da $n = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ mal}}$ einzige Sum. zerl.

(c) $P(n,k) = 0$ falls $k > n$ (da $n_1 + \ldots + n_k \geq k$) oder $k = 0 < n$

<u>Bsp. 7.3</u> $n = 7$.

k	1	2	3	4	5	6	7
	7	1+6 2+5 3+4	1+1+5 1+2+4 1+3+3 2+2+3	1+1+1+4 1+1+2+3 1+2+2+2	1+1+1+1+3 1+1+1+2+2	1+1+1+1+1+2	1+...+1
$P(7,k)$	1	3	4	3	2	1	1

<u>Bem. 7.4</u> Sei $\mathcal{P}_{n,k}$ die Menge der Sum. zerl. von n in k Summanden. Dann $\mathcal{Z}_{n,k} \twoheadrightarrow \mathcal{P}_{n,k}$, $\mathcal{S} \mapsto \{|X| \mid X \in \mathcal{S}\}$, und somit $S(n,k) = |\mathcal{Z}_{n,k}| \geq |\mathcal{P}_{n,k}| = P(n,k)$.

<u>Satz 7.5</u> (Rekursionsformel für Partitionszahlen) Für $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $k \leq n$, gilt: $P(n,k) = P(n-1, k-1) + P(n-k, k)$.

<u>Beweis:</u> Übung. $\square$

<u>Veranschaulichung:</u> <u>Partitionszahldreieck</u> Übung.

8. Übersicht

Def. 8.1. Seien $M = \{1, \dots, m\}$ und $N = \{1, \dots, n\}$.

Def. folgende Äqu.rel. auf $M^N := \{f \mid f : N \to M\}$:

		Interpretation: „Vergiss Ordnung auf …
(i) $f \eqsim g :=$	$\exists\, s \in S_n : \quad f \circ s = g$	N bzw.
(ii) $f \simeq g :=$	$\exists\, t \in S_m : \quad t \circ f = g$	M bzw.
(iii) $f \approxeq g :=$	$\exists\, t \in S_m : \exists\, s \in S_n : \quad t \circ f \circ s = g$	N und M."

Nach Lem. I.3.15. induzieren diese auch Äqu.rel. auf den Teilmengen

(a) $\mathrm{Inj}(M^N) := \{f \mid f : N \hookrightarrow M\}$

(b) $\mathrm{Surj}(M^N) := \{f \mid f : N \twoheadrightarrow M\}$

(c) $\mathrm{Bij}(M^N) := \{f \mid f : N \to M \text{ bij}\}$

Bem. 8.2 Äqu.klassen $[f] \in A/\sim$ haben folgende Interpretation:

A \ $\sim$	$=$	$\eqsim$	$\simeq$	$\approxeq$
M^N	Wort bzw. geord. mehrf. Auswahl von n aus m	Multimenge $(X, \#)$ mit $\lvert X\rvert = n$ und $\#(x) \leq m$ bzw. geord. Sum.zerl. $(n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^M$ mit $n = n_1 + \dots + n_m$ und $n_i = \lvert f^{-1}(i)\rvert \in \mathbb{N}$ bzw. ungeord. mehrf. Auswahl von n aus m	(ungeord.) Zerl. $\{f^{-1}(i) \mid i \in M\} \setminus \emptyset$ in höchstens m Teilmengen, d.h. $\bigcup_{k \leq m} Z_{n,k}$	(ungeord.) Sum.zerl. $n = n_1 + \dots + n_m$ mit $n_i = \lvert f^{-1}(i)\rvert \in \mathbb{N}$
$\mathrm{Inj}(M^N)$	geord. einf. Auswahl von n aus m	ungeord. einf. Auswahl von n aus m.	$\{[f]\}$ falls $n \leq m$ sonst $\emptyset$	$\{[f]\}$ falls $n \leq m$ sonst $\emptyset$
$\mathrm{Surj}(M^N)$	geord. Zerl. $(f^{-1}(i))_{i \in M} \in \mathcal{P}(N)^M$ von N in m Teilmengen	geord. Sum.zerl. $(n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^M$ mit $n = n_1 + \dots + n_m$ $n_i = \lvert f^{-1}(i)\rvert \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$	(ungeord.) Zerl. $\{f^{-1}(i) \mid i \in M\}$ von N in m Teilmengen, d.h. $Z_m(N)$	(ungeord.) Sum.zerl. $n = n_1 + \dots + n_m$ mit $n_i = \lvert f^{-1}(i)\rvert \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$
$\mathrm{Bij}(M^N)$	S_n falls $n = m$ sonst $\emptyset$	$\{[f]\}$ falls $n = m$ sonst $\emptyset$	$\{[f]\}$ falls $n = m$ sonst $\emptyset$	$\{[f]\}$ falls $n = m$ sonst $\emptyset$

<u>Satz 8.3.</u> Die Anzahl der Elemente $|A/\sim|$ in Bem. 8.2 sind folgende:

$A \backslash \sim$	$=$	$\overline{\sim}$	$\simeq$	$\approx$
M^N	m^n	$\binom{n+m-1}{n}$	$\sum_{k=0}^{m} S(n,k)$	$P(n+m,m)$ (Übung)
$\mathrm{Inj}(M^N)$	$(m)_n$	$\binom{m}{n}$	1 falls $n \leq m$ 0 sonst	1 falls $n \leq m$ 0 sonst
$\mathrm{Surj}(M^N)$	$m!\,S(n,m)$	$\binom{n-1}{m-1}$ (Übung)	$S(n,m)$	$P(n,m)$
$\mathrm{Bij}(M^N)$	$m!$	1 falls $n=m$ 0 sonst	1 falls $n=m$ 0 sonst	1 falls $n=m$ 0 sonst

$\square$