I Logik und Mengenlehre

1. Aussagen und logische Verknüpfungen

Wissenschaft braucht eine präzise Sprache zum sicheren Schlußfolgern.
Warum nicht unsere Umgangssprache?
Begriffe und Worte sind oft unklar oder mehrdeutig, z.B.

- „Messe" (Ausstellung, Gottesdienst, ...)
- „Schloss" (Verschluss, Gebäude, ...)
- „Hahn" (Tier, Wasserhahn, Stadt, Flugplatz, ...)
- „Abschlussklassenarbeit" (Abschlussarbeit oder Abschlussklasse)

Aussagen sind oft mehrdeutig oder haben strittigen Wahrheitsgehalt, z.B.

- „Lena ist klug." „Klaus ist schön."
- „€100 ist viel Geld."
- „Jetzt ist der Ofen aus."
- „Die Justiz ermittelt nach Todesschüssen gegen Polizisten." (Berliner Tagesspiegel)

In der Wissenschaft brauchen Begriffe eine klare Definition, Aussagen einen eindeutigen Wahrheitswert. Unter diesen Vorgaben baut mathematische Sprache und Formalismus auf der Umgangssprache auf.

(Mathematische) Aussagen sind Sprachgebilde, denen genau einer der Wahrheitswerte w („wahr") oder f („falsch") zugeordnet ist. Man sagt "gilt" statt "ist wahr". Man verwendet Grossbuchstaben zur Notation solcher Aussagen.

Bsp. 1.1.

- $A :=$ "64 ist durch 3 teibar." falsche Aussage
- $B :=$ "$2^{25964951} - 1$ ist eine Primzahl." wahre Aussage
- $C :=$ "C ist falsch." keine Aussage
- $D :=$ "Es gibt unendlich viele Zahlen a, so daß a und $a+2$ Primzahlen sind."
  Aussage mit unbekanntem Wahrheitswert (Goldbachvermutung, 1742)

Mittels logischer Verknüpfungen, sog. Junktoren, lassen sich neue Aussagen bilden.

Def. 1.2 Seien A und B Aussagen.

Die Aussagen $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $B \Leftarrow A$, $A \Leftrightarrow B$ sind dann wie folgt definiert.

	A	w	f
Negation	$\neg A :=$ „nicht A"	f	w

	A	w	w	f	f
	B	w	f	w	f
Konjunktion	$A \wedge B :=$ „A und B"	w	f	f	f
Disjunktion	$A \vee B :=$ „A oder B"	w	w	w	f
Implikation mit Voraussetzung A und Folgerung B	$A \Rightarrow B :=$ „wenn A, dann B" $=: B \Leftarrow A$	w	f	w	w
Äquivalenz	$A \Leftrightarrow B :=$ „genau dann A, wenn B"	w	f	f	w

Bsp. 1.3. Seien A, B, C, D wie in Beispiel 1.1.

- $\neg A$ wahr, $\neg B$ falsch, $\neg C$ unbekannt
- $A \wedge B$ falsch, $A \vee B$ wahr
- $B \Rightarrow A$ falsch, $A \Rightarrow B$ wahr! (obwohl kein kausaler Zusammenhang!)
- $E :=$ "Jeder Tag ist Sonntag." falsch

  $F :=$ "Der BVB ist deutscher Meister." falsch

  $E \Rightarrow F =$ "Wenn jeden Tag Sonntag ist, dann ist der BVB dt. Meister." wahr!
- $A \Leftrightarrow B$ falsch, $E \Leftrightarrow F$ wahr

Def. 1.4. Ein mittels der Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$ aus w, f, Aussagevariablen (d.h. wahrheitswertigen Variablen) und Klammern entstandenes Gebilde heißt ein (logischer) Ausdruck.

Eine Tautologie ist ein Ausdruck, der für beliebige Werte der enthaltenen Aussagevariablen immer wahr ist.

Satz 1.5 Folgende Ausdrücke sind Tautologien:

(a) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$ (doppelte Negation)

(b) $A \vee \neg A$ (ausgeschlossenes Drittes $\rightsquigarrow$ Fallunterscheidung)

(c) $A \wedge f \Leftrightarrow f$, $A \vee w \Leftrightarrow w$, $A \vee f \Leftrightarrow A$, $A \wedge w \Leftrightarrow A$

(d) $A \underset{\vee}{\wedge} A \Leftrightarrow A$ (folgt aus (b) und (c))

(e) $A \underset{\vee}{\wedge} B \Leftrightarrow B \underset{\vee}{\wedge} A$ (Kommutativität)

(f) $A \underset{\vee}{\wedge} (B \underset{\vee}{\wedge} C) \Leftrightarrow (A \underset{\vee}{\wedge} B) \underset{\vee}{\wedge} C$ (Assoziativität)

(g) $A \underset{\vee}{\wedge} (B \underset{\wedge}{\vee} C) \Leftrightarrow (A \underset{\vee}{\wedge} B) \underset{\wedge}{\vee} (A \underset{\vee}{\wedge} C)$ (Distributivität)

(h) $\neg(A \underset{\vee}{\wedge} B) \Leftrightarrow (\neg A \underset{\wedge}{\vee} \neg B)$ (De Morgansche Regel)

(i) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

(j) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (Kontraposition $\rightsquigarrow$ Widerspruchsbeweis)

(k) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

(l) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

Beweis: Per Tabelle am Bsp. vom ersten Teil von (h)

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$	(h)
w	w	w	f	f	f	f	w
w	f	f	w	f	w	w	w
f	w	f	w	w	f	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w

Rest analog als Übung. $\square$

2. Mengen

Wir verzichten auf eine axiomatischen Einführung der Mengenlehre.

Cantorschen Mengendefinition: Eine Menge M ist eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte x unserer Anschauung oder unseres Denkens – sogenannter Elemente – zu einem Ganzen.

Notation: $x \in M :=$ "x ist Element von M", $x \notin M := \neg(x \in M)$,

$x = y :=$ "x gleich y", $x \neq y := \neg(x = y)$

Beschreibung von Mengen erfolgt durch

- Aufzählung:
  - $L := \{\text{Hose}, \text{Jacke}\}$, Hose $\in L$, Apfel $\notin L$.
  - $Z := \{1, 3, 5\}$
  - $G := \{\ldots, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$ ungenau (Problem bei unendl. Mengen) Menge der geraden Zahlen
- Eigenschaft: (siehe Def. 2.1.)
  - $K := \{k \mid k \text{ ist ein Kleidungsstück}\}$
  - $G = \{x \mid x \text{ ist gerade Zahl}\}$
- Bildungsgesetz:
  - $G = \{2x \mid x \text{ ganze Zahl}\}$
  - $U := \{2x+1 \mid x \text{ ganze Zahl}\}$ Menge der ungeraden Zahlen

Achtung!

- Mengen ungeordnet, Elemente ohne Vielfachheit: $\{1,2\} = \{2,1\}$, $\{1,1,1\} = \{1\}$.
- Russelsches Paradoxon: Sei $\mathcal{M} = \{M \mid M \text{ ist Menge mit } M \in M\}$.
  Dann gilt die falsche Aussage $\mathcal{M} \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \mathcal{M} \notin \mathcal{M}$.
  Man vermeidet solche Widersprüche z.B. durch Beschränkung auf Teilmengen (siehe Def. 2.7) einer festen Grundmenge.

Def. 2.1. (Standardbezeichnungen für Mengen) (a) $\emptyset := \{\}$ leere Menge.

(b)

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\} \\ \mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\} \\ \mathbb{Q} \\ \mathbb{R} \end{array}\right\} \text{Menge der} \left\{\begin{array}{l} \text{natürlichen} \\ \text{ganzen} \\ \text{rationalen} \\ \text{reellen} \end{array}\right\} \text{Zahlen}$$

Def. 2.2 Eine Aussageform $A(x,y,\dots)$ ist ein Ausdruck, der zusätzlich Objektvariablen $x, y, \dots$ enthalten kann. Deren Ersetzen durch Objekte führt zu Aussage. Aussageform bedeutet Aussage über Objekte. Für Aussage $A(x)$ über $x \in M$ sei $M_{A(x)} := \{x \in M \mid A(x)\} = \{x \mid x \in M \wedge A(x)\}$ die Menge der $x \in M$, für die $A(x)$ gilt.

Bsp. 2.3.

(a) $A(x) := x > 5 \wedge x < 11$, $A(1)$ falsch, $A(7)$ wahr.

$\{x \in \mathbb{Z} \mid A(x)\} = \{6, 7, 8, 9, 10\}$, $\underbrace{\mathbb{N}_{\geq 1}}_{\text{bedeutet } A(n) := n \geq 1}$ $= \{1, 2, 3, \dots\}$.

(b) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = x\} = \{-1, 0, 1\}$

(c) $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \underset{\text{bedeutet } \wedge}{,} q \in \mathbb{N}, q \neq 0\}$ wobei $\underbrace{\frac{p}{q} = \frac{r}{s}}_{\text{in } \mathbb{Q}} := \underbrace{p \cdot s = q \cdot r}_{\text{in } \mathbb{Z}}$ (siehe Bsp. 4.14.(b)).

Def 2.4. (Quantoren) Sei M eine Menge und $A(x)$ Aussage über $x \in M$.

(a) $\forall x \in M : A(x)$ sei die Aussage „Für alle $x \in M$ gilt $A(x)$."

(b) $\exists^{(1)} x \in M : A(x)$ sei die Aussage „Es gibt (genau) ein $x \in M$ für das $A(x)$ gilt."

Schreibe $\nexists \dots$ für $\neg(\exists \dots)$.

Bsp. 2.4.

(a) $G = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ gerade}\} = \{2y \mid y \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y \in \mathbb{Z} : x = 2y\}$.

(b) Menge aller Primzahlen $\mathbb{P} := \{x \in \mathbb{N} \mid P(x)\}$ wobei

$P(x) := x \neq 1 \wedge (\forall y, z \in \mathbb{N} : (x = y \cdot z \Rightarrow (y = 1 \vee z = 1)))$ "x ist Primzahl."

Lem. 2.5. Für M und $A(x)$ wie in Def. 2.4. gilt

(a) $B := \neg(\forall x \in M : A(x)) \Leftrightarrow \exists x \in M : \neg A(x) =: C$

(b) $\neg(\exists x \in M : A(x)) \Leftrightarrow \forall x \in M : \neg A(x)$

Beweis: (a) Nach Satz 1.5 (l) müssen wir $B \Rightarrow C$ und $B \Leftarrow C$ zeigen.

($\Rightarrow$) Nach Satz 1.5 (b) gilt B oder $\neg B$. Im zweiten Fall gilt $B \Rightarrow C$ immer. Wir können also B wahr und somit $\forall x \in M : A(x)$ falsch annehmen. Also gibt es $x \in M$ mit $A(x)$ falsch und somit ist $\neg A(x)$ wahr. Folglich gilt C und somit auch $B \Rightarrow C$. ($\Leftarrow$) analog. (b) Übung. □

Bsp. 2.6. $A :\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists N \geq 0 : \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$ (siehe Def. von Konvergenz)

$\neg A \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall N \geq 0 : \exists n \geq N : |a_n - a| \geq \varepsilon$

24.4.2017

Def. 2.7. (Teilmengen) Seien M und X Mengen.

(a) X heißt Teilmenge von M falls $\forall x \in X : x \in M$ gilt. Man schreibt dann $X \subseteq M$ (oder $M \supseteq X$) und $X \not\subseteq M :\Leftrightarrow \neg (X \subseteq M)$ (oder $M \not\supseteq X$).

(b) X heißt echte Teilmenge von M falls $X \subseteq M$ und $X \neq M$. Man schreibt dann $X \subsetneq M$ (oder $M \supsetneq X$).

Bsp. 2.8. (a) Für jede Menge M, $\emptyset \subseteq M$ und $M \subseteq M$.

(b) $\mathbb{N} \underset{\not\ni -1 \in}{\subsetneq} \mathbb{Z} \underset{\not\ni \frac{1}{2} \in}{\subsetneq} \mathbb{Q} \underset{\not\ni \pi \in}{\subsetneq} \mathbb{R}$

(c) $\{x \in M \mid A(x)\} \subseteq M$

Bem. 2.9. $X = Y \Leftrightarrow X \subseteq Y \wedge X \supseteq Y$

Def. 2.10. (Mengenoperationen) Seien $X, Y \subseteq M$. (bedeutet $X \subseteq M$ und $Y \subseteq M$)

(a) $X \cup Y := \{z \in M \mid z \in X \vee z \in Y\}$ Vereinigung

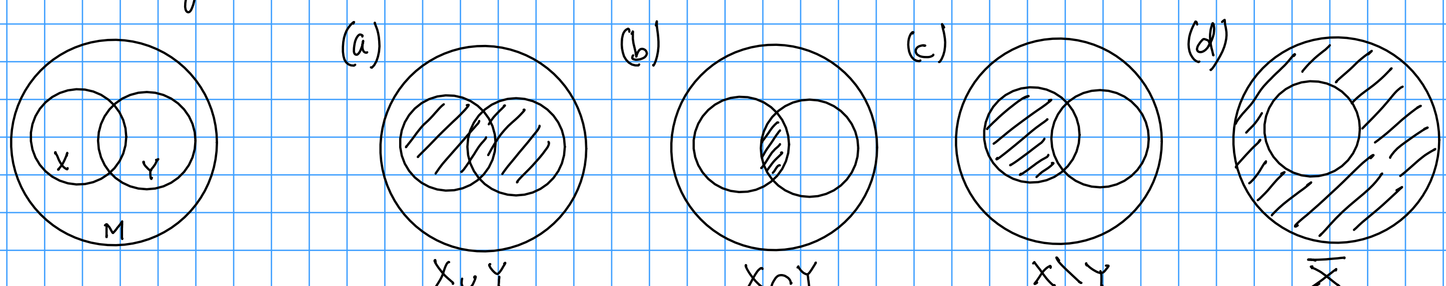
(b) $X \cap Y := \{z \in M \mid z \in X \wedge z \in Y\}$ (Durch-)schnitt

(c) $X \setminus Y := \{z \in M \mid z \in X \wedge z \notin Y\}$ Differenzmenge

von X und Y

(d) $\overline{X} := M \setminus X$ Komplement von X in M.

Venn-Diagramme



Satz 2.11. (Grundgesetze bei Mengenoperationen) Seien $X, Y, Z \subseteq M$.

(a) $\overline{\overline{X}} = X$

(b) $X \cup \overline{X} = M$

(c) $X \cap \emptyset = \emptyset$, $X \cup M = M$, $X \cup \emptyset = X$, $X \cap M = X$

(d) $X \underset{\cup}{\cap} X = X$

(e) $X \underset{\cup}{\cap} Y = Y \underset{\cup}{\cap} X$ (Kommutativität)

(f) $X \underset{\cup}{\cap} (Y \underset{\cup}{\cap} Z) = (X \underset{\cup}{\cap} Y) \underset{\cup}{\cap} Z$ (Assoziativität)

(g) $X \underset{\cup}{\cap} (Y \underset{\cap}{\cup} Z) = (X \underset{\cup}{\cap} Y) \underset{\cap}{\cup} (X \underset{\cup}{\cap} Z)$ (Distributivität)

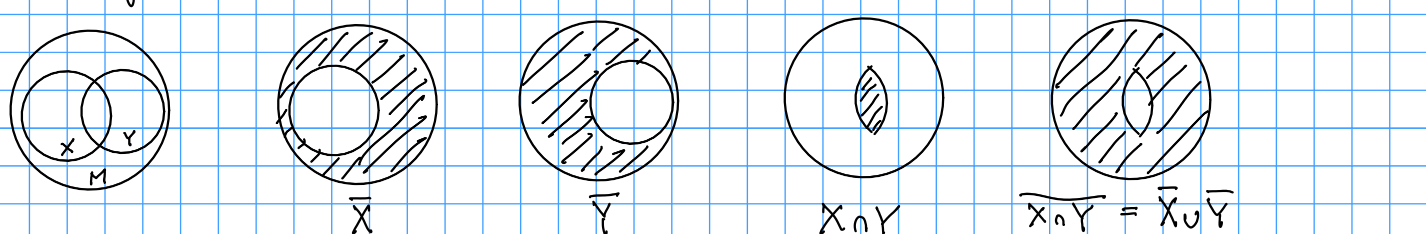
(h) $\overline{X \underset{\cup}{\cap} Y} = \overline{X} \underset{\cap}{\cup} \overline{Y}$ (De Morgansche Regel)

Beweis: Aussagen entsprechen denen in Satz 1.5., z.B. erster Teil von (h) Sei $z \in M$. Dann gilt

$$z \in \overline{X \cap Y} \underset{z \in M}{\overset{1.5.(c)}{\iff}} z \notin X \cap Y \iff \neg(z \in X \cap Y) \iff \neg(z \in X \wedge z \in Y)$$
$$\overset{1.5.(h)}{\iff} z \notin X \vee z \notin Y \underset{z \in M}{\overset{1.5.(c)}{\iff}} z \in \overline{X} \vee z \in \overline{Y} \iff z \in \overline{X} \cup \overline{Y}$$

Rest analog als Übung. □

Venn-Diagramme zu (h):



Def. 2.12. (Kartesisches Produkt)

Das kartesische Produkt der Mengen X und Y ist die Menge

$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$ aller geordneten Paare (x, y).

Allgemeiner def. man für n Mengen $X_1, \dots, X_n$ die Menge

$\prod_{i=1}^{n} X_i := X_1 \times \dots \times X_n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid \underbrace{\forall i = 1, \dots, n}_{\text{bedeutet } i \in \{1, \dots, n\}} : x_i \in X_i\}$

aller n-Tupel $(x_1, \dots, x_n)$.

Speziell $X^n := \underbrace{X \times \dots \times X}_{n}$. Def. $(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) :\iff \forall i = 1, \dots, n : x_i = y_i$.

Bsp. 2.13. (a) $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ Menge der Punkte in der Ebene

$(1,2) \neq (2,1)$ (nach Wahl eines Koordinatensytems)

(b) $\{0,1\}^8$ Menge der Bytes

(c) $\{A,\dots,H\}\times\{1,\dots,8\}$ Menge der Felder des Schachbretts

Def 2.14. (Mächtigkeit endl. Mengen)

Eine Menge M heißt <u>endlich</u> falls sie endlich viele Elemente hat, sonst <u>unendlich</u>.
Die Anzahl $|M|$ (oder $\# M$) der Elemente heißt <u>Mächtigkeit</u> oder <u>Kardinalität</u> von M.
$|M|<\infty$ bzw. $|M| = \infty$ bedeutet „M endlich" bzw. „M unendlich".

Bsp. 2.15 (a) $|\{7,11,20,7\}| = 3$ (b) $\{\frac{7}{14}, \frac{1}{2}\} = 1$

(c) $|\mathbb{Z}| = \infty$ (d) $|\{0,1\}^8| = 256$

Lem. 2.16: Für endl. Mengen $X_1,\dots,X_n$ gilt $|X_1\times\dots\times X_n| = |X_1|\cdot\ldots\cdot|X_n|$. $\square$

Def. 2.17. (Potenzmenge, Mengensystem, Zerlegung) Sei M eine Menge.

Die Menge $\mathcal{P}(M) := \{X \mid X\subseteq M\}$ aller Teilmengen heißt <u>Potenzmenge</u> von M.
Eine Teilmenge $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{P}(M)$ heißt auch <u>Mengensystem über M</u>.
$\mathcal{S}$ heißt <u>disjunkt</u> falls $\forall X,Y\in\mathcal{S}: X\cap Y\neq\emptyset \Rightarrow X=Y$.
$\bigcup\mathcal{S} := \{x\in M \mid \exists X\in\mathcal{S}: x\in X\}$ heißt <u>Vereinigung von $\mathcal{S}$</u>.
Falls $\mathcal{S} = \{X_1,\dots,X_n\}$, schreibe $\bigcup_{i=1}^n X_i := X_1\cup\dots\cup X_n := \bigcup\mathcal{S}$. (siehe Def. 2.10.(a))
$\mathcal{S}$ heißt <u>Zerlegung</u> oder <u>Partition</u> von M falls $\emptyset\notin\mathcal{S}$, $\underbrace{\mathcal{S} \text{ disjunkt}, M=\bigcup\mathcal{S}}_{\text{Notation: } M=\dot{\bigcup}\mathcal{S}}$.
Sei $\mathcal{Z}(M) := \{\mathcal{S} \mid \mathcal{S} \text{ Zerl. von } M\}$.

Bsp. 2.18. $M := \{1,2,3\}$, $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2\}, M\}$,
$\{\{1\},\{1,3\}\}$ nicht disj., $\{\emptyset,\{1\},\{2\}\}$ disj. keine Zerl., $\{\{1\},\{2,3\}\}$ Zerl.

Lem. 2.19. Sei M endl. Menge, $\mathcal{S} = \{X_1,\dots,X_n\}$ Zerlegung von M. Dann gilt:
(a) $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$ (b) $|M| = |X_1|+\dots+|X_n| =: \sum_{X\in\mathcal{S}} |X|$. $\square$

3. Abbildungen

Def. 3.1. (Abbildung) Eine Abbildung f besteht aus einer Definitionsmenge X, einer Wertemenge Y und einer Zuordnungsvorschrift, die jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$, das Bild von x unter f, zuordnet.

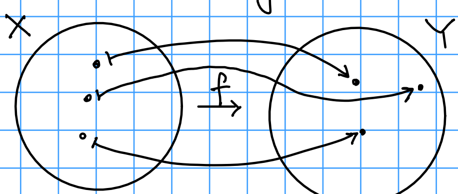
Man schreibt $f: X \to Y$ oder $X \xrightarrow{f} Y$ und $f(x) := y$ oder $x \mapsto y$.

Sei $Y^X := \{f \mid f: X \to Y\}$ die Menge aller Abbildungen von X nach Y.

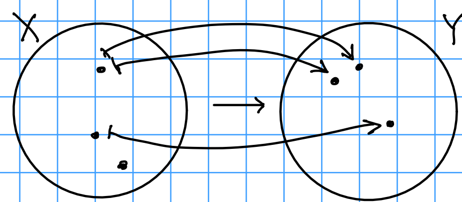
Gleichheit von Abbildungen $f: X \to Y$ und $g: V \to W$ sei def. durch

$f = g \;:=\; X = V \wedge Y = W \wedge \forall x \in X: f(x) = g(x)$.

Veranschaulichung



Von jeden Punkt (Element) in X geht genau ein Pfeil (Zuordnung) aus



keine Abbildung!

Bsp. 3.2.

(a) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x^2$, d.h. z.B. $f(1) = 1$, $f(-2) = 4$, ...

(b) $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(x) = 10x - x^2$, keine Abb., da $g(11) \notin \mathbb{N}$.

(c) Sei F Menge aller Fussballmanschaften und für $f \in F$ sei $a(f)$ das Alter eines Spielers von f. Dies def. keine Abb. $a: F \to \mathbb{N}$ da $a(f)$ nicht nur von f sondern auch von der Wahl des Spielers abhängt.

(d) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto x$ Abb. jedoch $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x$ keine Abb., da $\mathbb{Q} \ni \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

(e) Für $N \subseteq M$ ist $N \to M$, $z \mapsto z$, Abb. Speziell def. man die identische Abbildung $\mathrm{id}_M: M \to M$, $z \mapsto z$.

(f) Ist $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ endl., so lässt sich jedes $f: X \to Y$ durch Tabelle def.

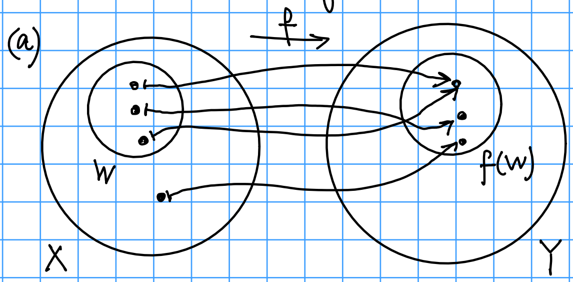
x	x_1	x_2	...	x_n
y	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_n)$

Def. 3.3 (Bild und Urbild) Sei $f: X \longrightarrow Y$ Abb.

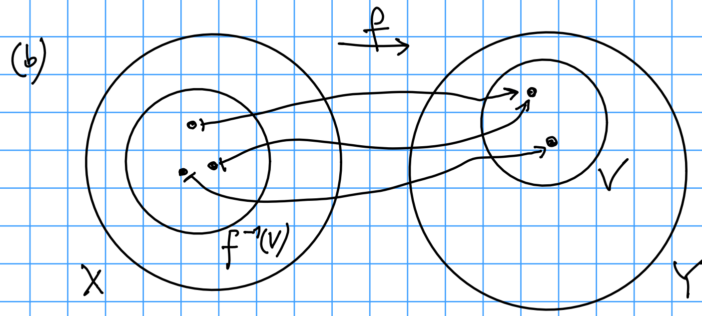
(a) Für $W \subseteq X$ heißt $f(W) := \{f(w) \mid w \in W\} \subseteq Y$ das <u>Bild von W unter f</u>, $f(X)$ das <u>Bild von f</u>.

(b) Für $V \subseteq Y$ heißt $f^{-1}(V) := \{x \in X \mid f(x) \in V\}$ das <u>Urbild von V unter f</u>, $f^{-1}(y) := f^{-1}(\{y\})$.

<u>Veranschaulichung</u>



Endpunkte aller Pfeile aus W



Startpunkte aller Pfeile nach V

Bsp. 3.4 Sei $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = x^2$. Dann gilt

$$f(\{2,5\}) = \{4, 25\} = f(\{2,-5,-2\}) \quad , \quad f^{-1}(25) = \{-5, 5\}, \quad f^{-1}(\{3,-9\}) = \emptyset .$$

Lem. 3.5 Für $f: X \longrightarrow Y$ und $\mathcal{T} \in \mathcal{Z}(Y)$ ist $f^{-1}(\mathcal{T}) := \{f^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{T}\} \setminus \emptyset \in \mathcal{Z}(X)$.

Insbesondere, ist $\mathcal{Y}_f := f^{-1}(\mathcal{T}) = \{f^{-1}(y) \mid y \in Y\} \setminus \emptyset \in \mathcal{Z}(X)$.

<u>Beweis:</u> (i) <u>$\emptyset \notin f^{-1}(\mathcal{T})$</u> gilt nach Def.

(ii) <u>$f^{-1}(\mathcal{T})$ disjunkt</u>: Für $f^{-1}(V), f^{-1}(W) \in f^{-1}(\mathcal{T})$, $V, W \in \mathcal{T}$, gilt

$$\emptyset \neq f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W) \overset{\text{Übung}}{=} f^{-1}(V \cap W) \Rightarrow V \cap W \neq \emptyset \Rightarrow V = W \Rightarrow f^{-1}(V) = f^{-1}(W).$$

(iii) <u>$X = \bigcup f^{-1}(\mathcal{T}) =: Z$</u>: Nach Bem. 2.9 müssen wir $X \subseteq Z$ und $X \supseteq Z$ zeigen.

($\supseteq$) gilt nach Def.

($\subseteq$) Sei $x \in X$. $\Rightarrow f(x) \in Y = \bigcup \mathcal{T} \Rightarrow \exists V \in \mathcal{T}: f(x) \in V \Rightarrow x \in f^{-1}(V) \in f^{-1}(\mathcal{T}) \subseteq Z$.

Für $\mathcal{T} := \{\{y\} \mid y \in Y\} \in \mathcal{Z}(Y)$ ist $f^{-1}(\mathcal{T}) = \mathcal{Y}_f$ und die Beh. folgt. $\square$

Bsp. 3.6 Def. $f: \{1, \dots, 7\} \to \mathbb{N}$ durch Tabelle

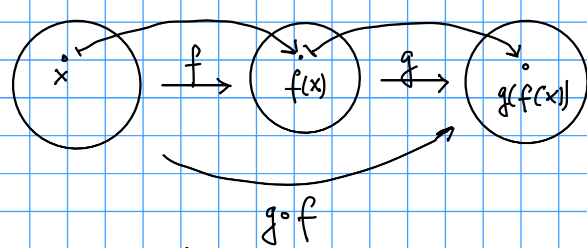
x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	5	2	1	5	3	5	2

Dann ist $\mathcal{Y}_f = \{\{1,4,6\}, \{2,7\}, \{3\}, \{5\}\}$.

27.4.2017

Def. 3.7 (Verkettung von Abb.) Seien $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ Abb. Die <u>Verkettung</u> oder <u>Komposition</u> von f und g ist die Abb. $g \circ f: X \to Z$, $x \longmapsto g(f(x))$.

Veranschaulichung



Bsp. 3.8 (Verkettung nicht kommutativ) Seien $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(x) := x^2$, $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $g(x) := x-1$.
Dann ist $f\circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto (x-1)^2$, und $g \circ f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x^2 - 1$.
Insbesondere $f \circ g \neq g \circ f$, da z.B. $f(g(-1)) = 2 \neq 0 = g(f(-1))$. $f\circ f$, $g \circ g$ nicht def.

Def. 3.9. (Produkt und Graph) Sind $f : X \to Y$ und $g : V \to W$ Abb.

(a) Def. $f \times g : X \times V \to Y \times W$, $(x,v) \longmapsto (f(x), g(v))$, Produkt von f und g.

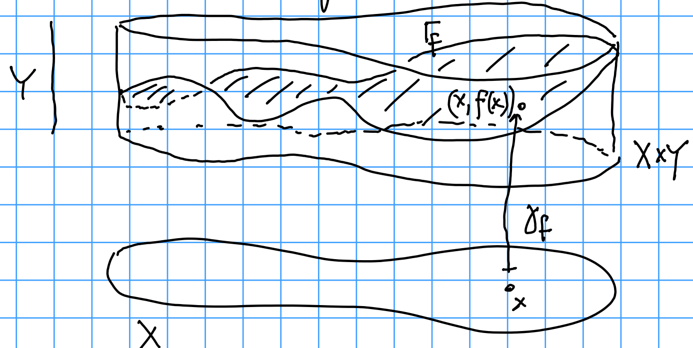
(b) Falls $X = V$, def. $(f,g) : X \to Y \times W$, $x \longmapsto (f(x), g(x))$.

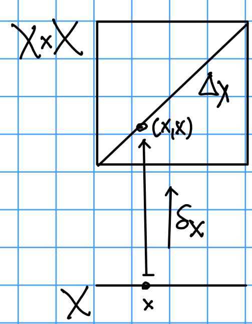
(c) Def. $X \times Y \xrightarrow{pr_X} X$, $(x,y) \mapsto x$, Projektion auf X, analog pr_Y.

(d) $\gamma_f := (id_X, f) : X \to X \times Y$ bzw. $\Gamma_f := \gamma_f(X)$ heißt Graph von f.

(e) $\delta_X := \gamma_{id_X} : X \to X^2$ bzw. $\Delta_X := \Gamma_{id_X}$ heißt Diagonale von X.

Veranschaulichung:





Bem. 3.10. (a) $(f,g) = (f \times g) \circ \Delta_X$ (b) $f = pr_Y \circ (f,g)$ (c) $id_X = pr_X \circ \gamma_f$

$g = pr_W \circ (f,g)$ $f = pr_Y \circ \gamma_f$

Def. 3.11 (Injektiv und Surjektiv) Eine Abb. $f : X \to Y$ heißt

(a) injektiv falls $\forall\, x, w \in X : f(x) = f(w) \Rightarrow x = w$,

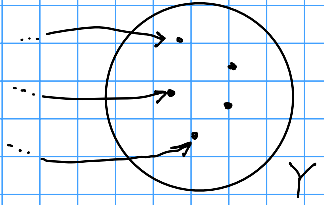
(b) surjektiv falls $\forall\, y \in Y : \exists\, x \in X : f(x) = y$,

(c) bijektiv falls f injektiv und surjektiv.

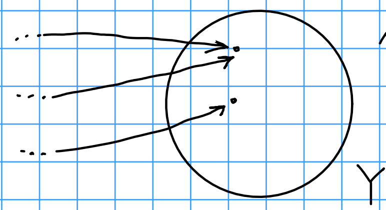
Wir ersetzen „$\longrightarrow$" durch „$\hookrightarrow$" bzw. „$\twoheadrightarrow$" falls f inj. bzw. surj.

Veranschaulichung: Abb. injektiv/surjektiv falls

jedes $y \in Y$ Endpunkt höchstens/mindestens eines Pfeils.



injektiv, aber nicht surjektiv



nicht injektiv, aber surjektiv

„Injektive Abb. verliert keine Information"

Bsp. 3.12.

(a) Für $f(x) := x^2$ ist $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ weder inj. noch surj.,
aber $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ inj. und $f: \mathbb{Z} \to \{0, 1, 4, 9, 25, \dots\}$ surj.

(b) $pr_X : X \times Y \to X$ surj. $\Leftrightarrow X = \emptyset \vee Y \neq \emptyset$, $\quad pr_X$ inj. $\Leftrightarrow X = \emptyset \vee |Y| \leq 1$.

(c) Sei $f: X \to Y$. Dann $\gamma_f : X \to X \times Y$ inj., denn für $x, w \in X$ gilt

$$\gamma_f(x) = \gamma_f(w) \Rightarrow x = id_X(x) \overset{3.10(c)}{=\!=} pr_X \circ \gamma_f(x) = pr_X(\gamma_f(x)) = pr_X(\gamma_f(w)) = \dots = w.$$

Def. 3.13. (Einschränkung) Sei $f: X \to Y$. Die Zuordnung $x \mapsto f(x)$ def.

(a) für $V \subseteq X$ eine Abb. $f|V : V \to Y$, die Einschränkung von f auf V, und

(b) für $f(X) \subseteq W \subseteq Y$ eine Abb. $f: X \to W$.

Bem. 3.14. $f: X \to Y$ surj. $\Leftrightarrow f(X) = Y$. Insbesondere, $f: X \to f(X)$ surj.

Lem. 3.15.: Seien $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ Abb. Dann gilt:

(a) f und g inj. $\Rightarrow g \circ f$ inj. $\Rightarrow f$ inj.

(b) f und g surj $\Rightarrow g \circ f$ surj. $\Rightarrow g$ surj.

(c) f und g bij. $\Leftrightarrow g \circ f$ und $f \circ g$ bij.

Beweis: (a) Für $x, w \in X$ gilt:

- $g \circ f(x) = g \circ f(w) \Rightarrow g(f(x)) = g(f(w)) \overset{g \text{ inj.}}{\Longrightarrow} f(x) = f(w) \overset{f \text{ inj.}}{\Longrightarrow} x = w.$
- $f(x) = g(w) \Rightarrow g \circ f(x) = g(f(x)) = g(f(w)) = g \circ f(w) \overset{g \circ f \text{ inj}}{\Longrightarrow} x = w.$

(b) Übung (c) folgt nach Def. aus (a) und (b). $\square$

Lem. 3.16 $f: X \to Y$ und $g: V \to W$ inj. / surj.

$\Leftrightarrow f \times g : X \times V \to Y \times W$ inj. / surj. **Beweis:** Übung. $\square$

Def. 3.17 (Inverse Abb.) Sei $f: X \to Y$ Abb. Eine Abb. $g: Y \to X$ heißt **links-** bzw. **rechtsinvers** zu f falls $g \circ f = id_X$ bzw. $f \circ g = id_Y$, und **invers** zu f oder **Umkehrabbildung** von f falls beides gilt.

Satz 3.18 (Umkehrabb.) Sei $f: X \to Y$ Abb. Dann gilt

(a) f inj. $\Leftrightarrow$ $\exists$ Linksinv. zu f

(b) f surj. $\Leftrightarrow$ $\exists$ Rechtsinv. zu f.

(c) f bij. $\Leftrightarrow$ $\exists$ Inverse zu f.

(d) Umkehrabb. ist eindeutig und wird mit f^{-1} bezeichnet.

Beweis:

(a) ($\Rightarrow$) Sei f inj. und $y \in Y$. Falls $y \in f(X)$ gibt es dann genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Andernfalls wähle $x \in X$ beliebig. Setze $g(y) := x$. Dies def. Abb. $g: Y \to X$. Sei nun $x \in X$ und setze $y := f(x)$. Wegen Eindeutigkeit gilt $g(y) = x$ $\Rightarrow g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = x = id_X(x)$. Es folgt $g \circ f = id_X$.

($\Leftarrow$) Sei g linksinv. zu f und $x, w \in X$ mit $f(x) = f(w)$. Dann gilt $x = id_X(x) = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(f(w)) = \ldots = w$. Somit f inj.

(b) ($\Rightarrow$) Sei f surj. Dann gibt es zu jedem $y \in Y$ ein $g(y) := x \in X$ mit $f(x) = y$. Dies def. Abb. $g: Y \to X$. Für alle $y \in Y$ gilt $f \circ g(y) = f(g(y)) = f(x) = y = id_Y(y)$. Es folgt $f \circ g = id_Y$.

($\Leftarrow$) Sei g rechtsinv. zu f und $y \in Y$. Setze $x := g(y)$. Dann gilt $f(x) = f(g(y)) = f \circ g(y) = id_Y(y) = y$. Somit f surj.

(c) ($\Rightarrow$) folgt aus (a) und (b) da gleiche Def. von g ($\Leftarrow$) direkt aus (a) und (b).

(d) Seien g und h invers zu f und $y \in Y$. Da beide rechtsinv. gilt $f(g(y)) = y = f(h(y))$. Da f nach (a) inj., somit $g(y) = h(y)$. Es folgt $g = h$. $\square$

Bem. 3.19 g linksinv zu f $\overset{3.17}{\Longleftrightarrow}$ f rechtsinv. zu g D.h. Links-/Rechtsinverse sind surj. / inj.

$$\begin{array}{ccc} g \text{ linksinv zu } f & \overset{3.17}{\Longleftrightarrow} & f \text{ rechtsinv. zu } g \\ \Downarrow 3.18(a) & & \Downarrow 3.18(b) \\ f \text{ inj.} & & g \text{ surj.} \end{array}$$

Bsp. 3.20

(a) Sei $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, x \mapsto x^2$. Jedes $z \in \mathbb{N}$ def. eine (andere) Linksinv.

$$g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad g(y) := \begin{cases} x, & \text{falls } \exists x \in \mathbb{N}: x^2 = y, \\ z, & \text{sonst.} \end{cases}$$

D.h. Linksinv. nicht eindeutig.

(b) Sei $f: X \longrightarrow Y$. Dann pr_X linksinv. zu $\gamma_f : X \to X \times Y$ (siehe Bem. 3.10.(c)).

(c) Sei $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto 2x-5 = y$. Auflösen nach liefert $g(y) := x = \frac{y+5}{2}$. Dies def. Umkehrabb. $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Somit f bij. mit $f^{-1} = g$.

Lem. 3.21 Seien $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} V \xrightarrow{h} W$ Abb. Dann gilt:

(a) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (Verkettung assoziativ)

(b) Falls f, g bij., $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Beweis: Übung □

Satz 3.22. Seien X, Y endl. Mengen. Dann sind äquivalent:

(i) $n := |X| \leq |Y| =: m$ (ii) $\exists\, X \hookrightarrow Y$ (iii) $\exists\, X \twoheadleftarrow Y$

Insbesondere gilt $|X| = |Y| \Leftrightarrow \exists\, X \longrightarrow Y$ bijektiv.

Beweis: Seien $x_1, \dots, x_n \in X$ bzw. $y_1, \dots, y_m \in Y$ die paarweise verschiedenen Elemente von X bzw Y. Beweis durch Ringschluss: ← Schreibweise formal inkorrekt

(i) ⇒ (ii): Sei $n \leq m$. Def. $f: X \longrightarrow Y$ durch $f(x_i) = y_i$, $\forall\, i = 1, \dots, n$. Dann ist f eine Abb., da $x_1, \dots, x_n$ paarw. versch., und injektiv, da $y_1, \dots, y_m$ paarw. versch.

(ii) ⇒ (iii): Sei $f: X \hookrightarrow Y$. $\overset{3.18(a)}{\Longrightarrow} \exists\, g: Y \to X : g \circ f = id_X$ surj. $\overset{3.15(b)}{\Longrightarrow} g$ surj.

(iii) ⇒ (i): Sei $g: Y \twoheadrightarrow X$. $\Rightarrow \forall x \in X: \emptyset \neq g^{-1}(x) \subseteq Y \Rightarrow \forall x \in X: |g^{-1}(x)| \geq 1$.

Nach Lem. 3.5 ist $\{g^{-1}(x) \mid x \in X\} = \{g(x_1), \dots, g(x_n)\}$ Part. von Y.

Mit Lem. 2.19(b). folgt $m = |Y| = |g(x_1)| + \dots + |g(x_n)| \geq \underbrace{1 + \dots + 1}_{n} = n$. □

Kor. 3.23 Sei X endl. Menge, $f: X \to X$. Dann gilt f inj. $\Leftrightarrow$ f surj.

Beweis:

$(\Rightarrow)$ Sei $f: X \hookrightarrow X$. $\Rightarrow f: X \to f(X)$ bij. $\overset{3.22}{\Rightarrow} |X| = |f(X)| \overset{f(X) \subseteq X}{\Rightarrow} f(X) = X \overset{3.14}{\Rightarrow} f$ surj.

$(\Leftarrow)$ Sei $f: X \twoheadrightarrow X$. $\overset{3.18(b)}{\Longrightarrow} \exists g: X \to X : f \circ g = id_X \overset{3.18(a)}{\Longrightarrow} g$ inj. $\overset{(\Rightarrow)}{\Longrightarrow} g$ bij.

$\overset{3.22}{\Longrightarrow} g \circ f = g \circ f \circ g \circ g^{-1} = g \circ id_X \circ g^{-1} = id_X \overset{3.18(a)}{\Longrightarrow} f$ inj. $\square$

4. Relationen

<u>Def. 4.1</u> Eine Teilmenge $R \subseteq X \times Y$ heißt (binäre) <u>Relation zwischen</u> den Mengen <u>X und Y</u> oder <u>Relation auf X</u> falls $X = Y$.

Man verwendet ein Symbol $\square$ zur Notation: $x \,\square\, y \;:=\; (x,y) \in R$.

(Allgemeine Relationen sind Teilmengen $R \subseteq X_1 \times \ldots \times X_n$.)

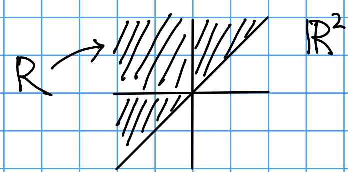
<u>Bsp. 4.2</u>

(a) <u>Gleichheit</u> auf einer Menge M: $R = \Delta_M$ (siehe Def. 3.9.(e))

(b) <u>Teilbarkeit</u> auf $\mathbb{Z}$: $y \mid x \;:=\; \exists z \in \mathbb{Z}: x = y \cdot z$. Setze $y \nmid x \;:=\; \neg(y \mid x)$.

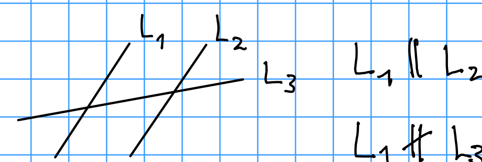
(c) <u>Ordnung</u> auf $M \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$:

$x \leq y \;:=\;$ "x kleiner oder gleich y"



(d) <u>Teilmengenrel.</u> $\subseteq$ auf $\mathcal{P}(M)$.

(e) <u>Parallelität</u> auf Menge der Geraden in $\mathbb{R}^2$.



(f) Sei $f: X \to Y$ eine Abb. Dann $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$ eine Relation.

Eine Relation $R \subseteq X \times Y$ def. umkehrt eine Abb. $f: X \to Y$ falls

$\forall x \in X \;\exists^1 f(x) := y \in Y : (x,y) \in R$.

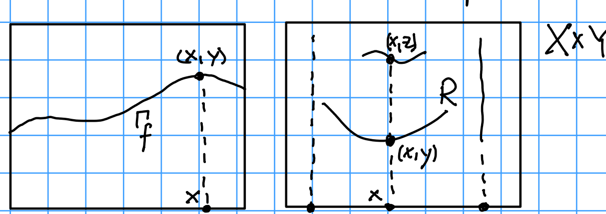


Abbildung   keine Abbildung

Entsprechend verallgemeinert man Def. 3.7 und 3.17 wie folgt.

<u>Def. 4.3</u> Seien $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$ Relationen.

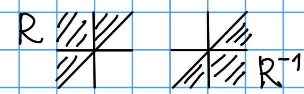
(a) $S \circ R := \{(x,z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y: (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S\} \subseteq X \times Z$

heißt <u>Verkettung</u> oder <u>Komposition</u> von R und S.

(b) $R^{-1} := \{(y,x) \in Y \times X \mid (x,y) \in R\} \subseteq Y \times X$ heißt <u>inverse</u> oder <u>Umkehrrelation</u> von R

Bsp. 4.4

(a) Umkehrrel. von $\leq$ auf $M \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ ist $\geq$.



(b) Umkehrrel. von Teilbarkeitsrel. auf $\mathbb{Z}$ ist Vielfachheitsrel.

(c) Für $f: X \to Y$ bij. ist $(\Gamma_f)^{-1} = \Gamma_{(f^{-1})}$.

(d) Für $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ ist $\Gamma_g \circ \Gamma_f = \Gamma_{g \circ f}$.

Bem. 4.5 Seien R, S wie in Def. 4.3. Dann gilt:

(a) $(R^{-1})^{-1} = R$ (b) $R^{-1} \circ R$ ist i.A. $\neq \Delta_X$, z.B. $R = \emptyset$.

(c) $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$ (entspricht Lem. 3.19(b) über Bem. 4.4.(c),(d))

Def 4.6 Eine Relation $\leq$ auf M heißt <u>Halbordnung</u> falls $\forall x, y, z \in M$:

(i) $x \leq x$ <u>Reflexivität</u>

(ii) $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ <u>Antisymmetrie</u>

(iii) $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ <u>Transitivität</u>

$M = (M, \leq)$ heißt auch <u>poset</u> (<u>p</u>artially <u>o</u>rdered <u>set</u>).

Sie heißt <u>Totalordnung</u> (oder <u>lineare Ordnung</u>) falls zusätzlich

(iv) $x \leq y \vee y \leq x$ <u>Totalität</u> „alle Elemente sind vergleichbar."

Schreibe $x \nleq y := \neg(x \leq y)$, $x < y := x \leq y \wedge x \neq y$, $x \nless y := \neg(x < y)$,

$y \underset{(}{\geq}{}_{)} x := x \underset{(}{\leq}{}_{)} y$ (inv. Relation), und $y \ngeq x := x \nleq y$.

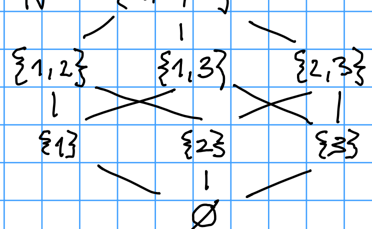
Bsp. 4.7

(a) $\exists$ Totalord. $\leq$ auf $M \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ kompatibel mit Addition und Multiplikation, d.h.

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$: (i) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ (ii) $x \leq y \wedge 0 \leq z \Rightarrow xz \leq yz$.

(b) Teilbarkeit auf $\mathbb{Z}$ ist Halbord., keine Totalord. da z.B. $3 \nmid 5 \wedge 5 \nmid 3$.

(c) $\subseteq$ ist Halbord. auf $\mathcal{P}(N)$, z.B. $N = \{1, 2, 3\}$



<u>Hasse-Diagramm</u>: $\begin{matrix} x \\ | \\ y \end{matrix}$ bedeutet $x \geq y$

(d) Teilmengen von posets sind posets.

Def. 4.8 Sei $(M, \leq)$ poset.

(a) $\operatorname{Min} M := \{z \in M \mid \forall w \in M : w \not< z\} \ni z$ heißt <u>minimal</u> oder <u>Minimum</u> in M.

$\operatorname{Max} M := \{z \in M \mid \forall w \in M : w \not> z\} \ni z$ heißt <u>maximal</u> oder <u>Maximum</u> in M.

(b) $z \in M$ ist <u>untere</u> bzw. <u>obere Schranke</u> von $X \subseteq M$ falls $\forall x \in X : z \leq x$ bzw. $z \geq x$.

Falls $X = M$, schreibe $\min M := z$ bzw. $\max M := z$.

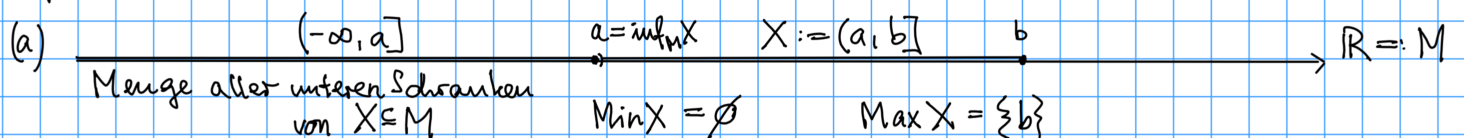
(c) Ein <u>Infimum</u> bzw. <u>Supremum</u> z von $X \subseteq M$ ist ein min. bzw. max. Element der Menge aller unteren bzw. oberen Schranken von $X \subseteq M$. Falls dieses eindeutig ist, schreibe $\inf_M X := z$ bzw. $\sup_M X := z$.

Def 4.9. (Reelle) <u>Intervalle</u> sind Teilmengen $I \subseteq \mathbb{R}$ der Gestalt

$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \qquad (a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\},$$
$$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, \qquad (a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$

wobei $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\underbrace{-\infty, \infty}_{\text{Symbole}}\}$ mit $-\infty < a < \infty$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

Bsp. 4.10.

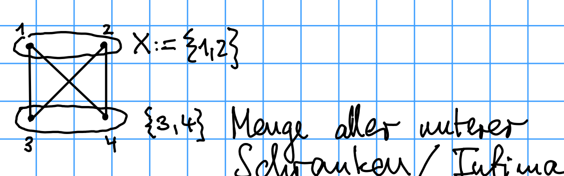


(b) $X := \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\} \subseteq \mathcal{P}(\{1,2,3\}) =: M$, $\operatorname{Min} X = \{\emptyset\}$, $\operatorname{Max} X = \{\{1\}, \{2\}\}$,

$\{\{1,2\}, \{1,2,3\}\}$ Menge aller oberer Schranken von $X \subseteq M$, $\sup_M X = \{1,2\}$.

$X \subseteq X$ hat <u>keine</u> obere Schranke.

(c) Betrachte $\leq$ auf $M = \{1, \dots, 4\}$ mit Hasse-Diagr.



Satz 4.11 (Vollständigkeit der reellen Zahlen) $\mathbb{R}$ ist <u>vollständig</u>, d.h. jede Teilmenge $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$ mit unterer bzw. oberer Schranke hat auch ein Infimum bzw. Supremum.

$\mathbb{R}$ ist der einzige vollständig total geordnete Körper (mit 4.7.(a).(i),(ii)). $\square$

Bem. 4.12 Sei $(M,\leq)$ poset.

(a) Falls $M \neq \emptyset$ endlich, so $\operatorname{Max} M \neq \emptyset \neq \operatorname{Min} M$.

(b) $\min X$ und $\max X$ sind eindeutig wegen Antisymmetrie.

(c) Falls $\leq$ Totalord., so sind Minima / Maxima / Infima / Suprema eindeutig.

(d) Falls $\min X$ bzw. $\max X$ existiert, so gilt:

(i) $\operatorname{Min} X = \{\min X\}$ bzw. $\operatorname{Max} X = \{\max X\}$ nach (a).

(ii) $\inf_M X = \min X$ bzw. $\sup_M X = \max X$

I.A. ist jedoch $\inf_M X \notin X$ bzw. $\sup_M X \notin X$ nicht eindeutig (siehe Bsp. 4.10).

Beweis: (ii) Offenbar ist $\min X$ ein Infimum von $X \subseteq M$. Sei $z \in M$ ein weiteres.

Da z untere Schranke von $X \subseteq M$ und $\min X \in X$, ist $z \leq \min X$.

Da $\min X$ untere Schranke und z Infimum von $X \subseteq M$, ist $z \geq \min X$.

Mit Antisymmetrie folgt $z = \min X$ und somit $\inf_M X = \min X$. $\square$

Def. 4.13 Sei $f: M \to N$ mit N poset.

(a) $x \in M$ heißt <u>Minimum</u> bzw. <u>Maximum</u> von f falls

$f(x) \in \operatorname{Min} f(M)$ bzw. $f(x) \in \operatorname{Max} f(M)$.

(b) f heißt <u>nach oben</u> bzw. <u>nach unten</u> <u>beschränkt</u> falls $f(M) \subseteq N$ eine obere bzw. untere Schranke besitzt und <u>beschränkt</u> falls beides der Fall ist.

(c) Ist M poset so heißt f <u>monoton</u> bzw. <u>antitone</u> falls

$\forall x,y \in M: \quad x \leq y \Rightarrow (f(x) \leq f(y) \text{ bzw. } f(x) \geq f(y))$.

(d) Sind M, N total geordnet so heißt f <u>streng</u> <u>monoton</u> bzw. <u>antiton</u> falls

$\forall x,y \in M: \quad x < y \Rightarrow (f(x) < f(y) \text{ bzw. } f(x) > f(y))$.

Bem. 4.14 Sei $f: M \to N$, M, N total geordnet.

(a) Ist f streng mono-/antiton so ist f injektiv.

(b) Ist f bijektiv und (streng) mono-/antiton, so auch die Umkehrabb. f^{-1}.

Def. 4.15 Eine Relation $\sim$ auf M heißt Äquivalenzrelation falls $\forall x,y,z \in M$:

(i) $x \sim x$ — Reflexivität

(ii) $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$ — Symmetrie

(iii) $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim y$ — Transitivität

Man nennt $[x] := \bar{x} := \{y \in M \mid y \sim x\} \subseteq M$ die Äquivalenzklasse von $x \in M$ und und x einen Repräsentant von $[x]$.

Man schreibt $M/\sim \; := \{[x] \mid x \in M\}$ für die Menge der Äquiv. klassen.

Bsp. 4.16

(a) Für $n \in \mathbb{Z}$ definiert $x \sim y = x \sim_n y := n \mid x - y$ Äquiv. rel. auf $\mathbb{Z}$:

(i) $0 = n \cdot 0 \Rightarrow n \mid 0 = x - x \Rightarrow x \sim x$

(ii) $x \sim y \Leftrightarrow n \mid x - y \Leftrightarrow \exists \; v \in \mathbb{Z}: x - y = n \cdot v \Rightarrow y - x = n \cdot (-v)$
$\Rightarrow n \mid y - x \Leftrightarrow y \sim x$

(iii) $x \sim y \wedge y \sim z \Leftrightarrow n \mid x - y \wedge n \mid y - z$
$\Rightarrow \exists \; v, w \in \mathbb{Z}: x - y = n \cdot v \wedge y - z = n \cdot w$
$\Rightarrow x - z = x - y + (y - z) = n \cdot v - n \cdot w = n \cdot (v - w)$
$\Rightarrow n \mid x - z \Rightarrow x \sim z$.

Es gilt $[x]_n = \{y \in \mathbb{Z} \mid n \mid y - x\} = \{x + n \cdot v \mid v \in \mathbb{Z}\}$, z. B.
$[3]_{12} = \{\ldots, 3, 15, 27, \ldots\} = [15]_{12}$ „3 Uhr = 15 Uhr"
$\mathbb{Z}/\sim_{12} = \{[0], [1], [2], \ldots, [11]\}$ Menge der „Uhrzeiten".

(b) Auf $M := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, oder $M := \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$, def. Äquiv. rel. durch

$$(p,q) \sim (r,s) := \underbrace{p \cdot s = q \cdot r}_{\text{in } \mathbb{Z}} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{p}{q} = \frac{r}{s}}_{\text{in } \mathbb{Q}} \quad \text{(siehe Bsp. 2.3.(c))}.$$

z. B. $[(1,2)] = \{(1,2), (2,3), (4,8), \ldots\}$

Dann def. $M/\sim \; \longrightarrow \mathbb{Q}$, $[(p,q)] \longmapsto \frac{p}{q}$, eine bij. Abb.

Eigentlich ist $\mathbb{Q} := M/\sim$ eine mögliche Definition von $\mathbb{Q}$.

Äquiv. rel. hängen direkt mit Zerlegungen zusammen:

Lem. 4.17 Sei $\sim$ Äquiv. rel auf $M \ni x, w$. Dann ist

(a) $x \in [x]$ und

(b) folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $x \sim w$

(ii) $[x] \cap [w] \neq \emptyset$

(iii) $[x] = [w]$.

Insbesondere ist $M/\sim$ eine Zerlegung von M (siehe Def. 2.17).

Beweis:

(a) wegen Reflexivität.

(b) (i) $\Rightarrow$ (ii): $x \in [x] \cap [w]$ wegen (a) und (i). $\Rightarrow$ (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei $y \in [x]$. (ii) $\Rightarrow \exists\, z \in [x] \cap [w] \overset{\text{Symm.}}{\Longrightarrow} y \sim x,\ x \sim z,\ z \sim w$.
$\overset{\text{Trans.}}{\Longrightarrow} y \sim w \Rightarrow y \in [w]$. Somit $[x] \subseteq [w]$. Vertauschen von x, w liefert (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (i): $x \overset{(a)}{\in} [x] \overset{(iii)}{=} [w] \Rightarrow$ (i).

Wegen (a) und (b) (i) $\Leftrightarrow$ (iii) ist $M/\sim$ Zerlegung von M. □

4.5.2017

I. A. sind Zuordnungen $M/\sim \to N$, $[z] \mapsto f(z)$, wie in Bsp. 4.16(b) nicht „wohldefiniert", da $f(z)$ von der Wahl eines Repräsentanten z von $[z]$ abhängt aber $[z] = [w] \not\Rightarrow f(z) = f(w)$ (siehe Bsp. 3.2.(c)).

Lem. 4.18 (Wohldefiniertheit)

Sei $\sim$ Äquiv. rel. auf M, $f: M \to N$ Abb. Dann sind äquivalent:

(i) $[z] \mapsto f(z)$ definiert eine Abb. $\bar{f}: M/\sim \to N$

(ii) $\forall\, z, w \in M: \quad z \sim w \Rightarrow f(z) = f(w)$

Beweis: (i) $\Leftrightarrow$ $\forall\, z, w \in M$: $[z] = [w] \Rightarrow f(z) = f(w)$

$\Updownarrow$ 4.17(b)

$z \sim w$ Somit (i) $\Leftrightarrow$ (ii). □

Bem. 4.19 (Übung)

(a) Ist $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(M)$ Zerlegung von M so def. $z \sim_{\mathcal{S}} w :\Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{S}: z, w \in X$ eine Äquiv. rel. auf M mit $M/\sim_{\mathcal{S}} = \mathcal{S}$.

(b) Zu jeder Äquiv.rel. $\sim$ auf M gehört eine Restklassenabbildung (kein Wohldef.problem) $\pi : M \longrightarrow M/\sim$, $z \mapsto [z]$, mit $\pi^{-1}([z]) = [z]$.

(c) Jede Abb. $f : X \to Y$ def. durch $w \sim_f x :\Leftrightarrow f(w) = f(x)$ eine Äquiv.rel. auf X. Mit $y := f(x)$ ist $[x] = f^{-1}(y)$ und somit $X/\sim = \{ f^{-1}(y) \mid y \in f(X) \}$.

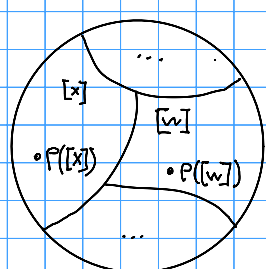
Satz 4.20 Sei M Menge. Dann gibt es eine Bijektion (siehe Bem. 4.19 (a))

$$\ddot{A}(M) := \{ \sim \mid \sim \text{ Äquiv.rel. auf } M \} \underset{\Psi:\ \sim_{\mathcal{S}} \leftarrow\!\shortmid\ \mathcal{S}}{\overset{\Phi:\ \sim\ \mapsto\ M/\sim}{\rightleftarrows}} \{ \mathcal{S} \mid \mathcal{S} \text{ Zerlegung von } M \} =: \mathcal{Z}(M)$$

Beweis: Für $\sim$ Äquiv.rel. auf M ist nach Lem. 4.17 $M/\sim$ Zerl. von M und somit Φ eine Abb. Nach Bem. 4.19 (a) ist auch Ψ eine Abb. und für $\mathcal{S} \in \mathcal{Z}(M)$ gilt $\Phi \circ \Psi(\mathcal{S}) = \Phi(\sim_{\mathcal{S}}) = M/\sim_{\mathcal{S}} = \mathcal{S}$ und somit $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{\mathcal{Z}(M)}$.
Für $\sim \in \ddot{A}(M)$ und $z, w \in M$ gilt $z \sim_{(M/\sim)} w \Leftrightarrow \exists [x] \in M/\sim : z, w \in [x] \overset{4.17(b)}{\Leftrightarrow} z \sim w$.
Es folgt $\Psi \circ \Phi(\sim) = \sim_{(M/\sim)} = \sim$ und somit $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\ddot{A}(M)}$ und $\Psi = \Phi^{-1}$. $\square$

Def. 4.21 Sei $\sim$ Äquiv.rel. auf M. Ein Repräsentantensystem P ist eine Rechtsinverse zu π, d.h. $P : M/\sim \longrightarrow M$ mit $\pi(P([x])) = [x]$
$\Leftrightarrow [P([x])] = [x]$
$\overset{4.17}{\Leftrightarrow} P([x]) \in [x]$

Veranschaulichung:



Bsp. 4.22 Für $\sim_{12}$ auf $\mathbb{Z}$ aus Bsp. 4.14 (a) ist z.B. P def. durch

$[x]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$\dots$	$[11]$
$P([x])$	12	13	14	15	$\dots$	23

ein Repr. system.

Hier kein Wohldefiniertheitsproblem, da feste Wahl eines Repräsentanten.

5. Abzählbarkeit

Def. 5.1. (Natürliche Zahlen)

Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist durch die Peano Axiome definiert:

(i) $0 \in \mathbb{N}$.

(ii) $\exists$ Nachfolgerabb. $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $n \mapsto n'$. n' heißt Nachfolger von n.

(iii) Induktionsaxiom ($\rightsquigarrow$ Induktionsbeweis): Für jede Aussage $A(n)$ über $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left(A(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}: A(n) \Rightarrow A(n')\right) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: A(n).$$

Schreibe $0' =: 1$, $1' =: 2$, $2' =: 3$, ...

Bem. 5.2 (a) $|M| = n$ ist def. als $\exists \{1, \ldots, n\} \to M$ bij. (siehe Def. 2.14, Satz 3.22).

(b) $(\mathbb{N}, +)$ Monoid (Gruppe ohne Inverse) mit Addition $+: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ def. durch

$n + 0 := n$ und $n + m' := (n+m)'$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Insbesondere $n + 1 = n'$.

(c) Totalordnung $\leq$ auf $\mathbb{N}$ ist def. durch $n < n'$ (siehe Bsp. 4.7).

(d) 5.1. (iii) $\Rightarrow$ Wohlordnungsaxiom: $\forall \emptyset \neq X \subseteq \mathbb{N}: \exists \min X$ (siehe Def. 4.8.(b))

(e) Äquivalent zu 5.1. (iii): Für $n_0 \in \mathbb{N}$ und alle Aussagen $A(n)$ über $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$:

$$A(n_0) \wedge \left(\forall n \in \mathbb{N}: \forall k \in \mathbb{N}: n_0 \leq k \leq n \wedge A(k) \Rightarrow A(n')\right) \Rightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N}: n \geq n_0 \Rightarrow A(n)\right)$$

Lem. 5.3 Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A(n) := \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}: 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.

Beweis durch „Induktion über n" (d.h. Anwenden von 5.1. (iii))

Induktionsanfang: Da $1 = \dfrac{1-x}{1-x}$, gilt $A(0)$.

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A(n)$ wahr angenommen.

(Induktionsvoraussetzung). Dann gilt auch $A(n+1)$: Sei $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$. Dann ist

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x^{n+1} \overset{A(n)}{=} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1} + (1-x)x^{n+1}}{1-x}$$

$$= \frac{1 - x^{n+1} + x^{n+1} - x^{n+2}}{1 - x} = \frac{1 - x^{(n+1)+1}}{1 - x}. \quad \square$$

Satz 5.4 (Rekursionssatz) Sei X Menge, $x_0 \in X$ und $g: \mathbb{N} \times X \to X$.

Dann $\exists^1 f: \mathbb{N} \to X$: $f(0) = x_0 \wedge \forall n \in \mathbb{N}: f(n+1) = g(n, f(n))$.

(Bem. 5.2(e) liefert Verallgemeinerung.) Beweis: Übung. $\square$

Bsp. 5.5 Seien $x_0, x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{R}$. Def. mittels $g: \mathbb{N}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(n,x) := x + x_{n+1}$,

$$f(n) = \sum_{i=0}^{n} x_i := \begin{cases} x_0 & \text{, falls } n=0 \\ \left(\sum_{i=0}^{n-1} x_i\right) + x_n & \text{, sonst.} \end{cases} \quad (= x_0 + \ldots + x_n)$$

z.B. $1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \sum_{i=0}^{n} x^i$. Analog def.

$$\prod_{i=0}^{n} x_i := \begin{cases} x_0 & \text{, falls } n=0 \\ \left(\prod_{i=0}^{n-1} x_i\right)\cdot x_n & \text{, sonst.} \end{cases} \quad (= x_0 \cdot\ldots\cdot x_n)$$

Not. 5.6 Für $\{x_0, \ldots, x_n\} = X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, def. $\sum_{x\in X} f(x) := \sum_{i=0}^{n} f(x_i)$, $\prod_{x\in X} f(x) := \prod_{i=0}^{n} f(x_i)$.

Def 5.7 (Mächtigkeit, Abzählbarkeit) Zwei Mengen X und Y heißen <u>gleichmächtig</u> (oder von gleicher Kardinalität) falls $\exists\, X \to Y$ bijektiv.
Im Falle $Y = \mathbb{N}$ nennt man X <u>abzählbar unendlich</u>. Ist X endlich oder abzählbar unendlich so heißt X <u>(höchstens) abzählbar</u>, sonst <u>überabzählbar</u>.

Lem. 5.8. (a) $\nexists\, X \twoheadrightarrow \mathbb{N} \;\vee\; \nexists\, \mathbb{N} \hookrightarrow X \;\Rightarrow\; X$ endlich

(b) $\exists\, X \twoheadrightarrow \mathbb{N} \;\vee\; \exists\, \mathbb{N} \hookrightarrow X \;\Rightarrow\; X$ unendlich

(c) $\exists\, \mathbb{N} \twoheadrightarrow X \;\vee\; \exists\, X \hookrightarrow \mathbb{N} \;\Rightarrow\; X$ abzählbar

(d) $\nexists\, \mathbb{N} \twoheadrightarrow X \;\vee\; \nexists\, X \hookrightarrow \mathbb{N} \;\Rightarrow\; X$ überabzählbar

Beweis: (c) Sei $g: X \hookrightarrow \mathbb{N}$ und X unendl. Nach Bem. 3.14 ist $g: X \to f(X) =: Y$ bij.
Nach Lem. 3.15(c), reicht es Y abzählbar unendl. zu zeigen. OBdA. $X = Y \subseteq \mathbb{N}$
Da X unendl., $X_n := X \setminus \{f(0), \ldots, f(n-1)\} \neq \emptyset$. Nach Bem. 5.2(d), def.
$f(n) := \min(X_n)$ eine Abb. $f: \mathbb{N} \to X$. Es gilt $\forall n \in \mathbb{N}$:
$f(n) \in X_n \subseteq X_{n-1} \Rightarrow f(n) > \min(X_n) = f(n-1) \Rightarrow f(n) \geq f(n-1) + 1 \Rightarrow f(n) \geq n$. (*)
Insbesondere f inj. Zeigen f surj. mit <u>Widerspruchsbeweis</u> (siehe Satz 1.5(j)):
Angenommen f nicht surj. $\Rightarrow X_\infty := X \setminus f(\mathbb{N}) \neq \emptyset$.
Nach Bem. 5.2(d), $\exists\, m := \min(X_\infty)$. Da $X_\infty \subseteq X_{m+1}$ folgt mit (*):
$m = \min(X_\infty) \geq \min(X_{m+1}) = f(m+1) \geq m+1$. $\lightning$ (lies „Widerspruch")
Folglich f bij. und X abzählbar unendl. Rest Übung. $\square$

Lem. 5.9. $\mathbb{N}^2$ ist abzählbar unendlich.

Beweis: Cantorsches Diagonalverfahren: Def. bij. Abb. $d: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ durch

$$\begin{array}{|llll} d(1) & d(3) & d(6) & d(10) \cdots \\ d(2) & d(5) & d(9) & \\ d(4) & d(8) & \ddots & \\ d(7) & & & \\ \vdots & & & \end{array} \quad := \quad \begin{array}{|llll} (1,1) & (2,1) & (3,1) & (4,1) \cdots \\ (1,2) & (2,2) & (3,2) & \\ (1,3) & (2,3) & \ddots & \\ (1,4) & & & \\ \vdots & & & \end{array}$$

Satz 5.10. $\mathbb{Q}$ ist abzählbar unendlich.

Beweis: Sei $d: \mathbb{N} \twoheadrightarrow \mathbb{N}^2$ aus Lem. 3.20. Nach Lem. 3.16, $e := \mathrm{id}_{\mathbb{N}} \times d : \mathbb{N}^2 \twoheadrightarrow \mathbb{N}^3$.

Def. $q: \mathbb{N}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{Q}$, $(i,m,n) \longmapsto (-1)^i \frac{m}{n+1}$. Nach Lem. 3.15(b), $q \circ e \circ d : \mathbb{N} \twoheadrightarrow \mathbb{Q}$.

Mit $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ folgt Beh. aus Lem. 5.8. (b), (c). □

Satz 5.11 Sei M Menge. Dann $\nexists\, M \twoheadrightarrow \mathcal{P}(M)$.

Beweis durch Widerspruch (siehe Satz 1.5. g)): Ang. $\exists\, p: M \twoheadrightarrow \mathcal{P}(M)$.

Betrachte $X := \{ z \in M \mid z \notin p(z) \} \subseteq M$. $\Rightarrow X \in \mathcal{P}(M) \overset{p \text{ surj.}}{\Longrightarrow} \exists\, x \in M : p(x) = X$.

Es folgt $x \in X \Leftrightarrow x \notin X$ ↯ Somit gilt die Behauptung. □

Kor. 5.12 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar.

Beweis: Beh. folgt aus Satz 5.11. mit $M = \mathbb{N}$ und Lem. 5.8. (d). □