

Mathematik für Informatiker: Algebraische Strukturen

Wintersemester 2016 - Übungsblatt 9

Abgabetermin: 13.1.2017, 8:15h

Aufgabe 1. Skizzieren Sie die folgenden Untermengen von \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 und überprüfen Sie, ob es sich um Untervektorräume von \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 als \mathbb{R} -Vektorräume handelt.

$$(a) U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1 \right\} \quad (b) U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 5x_1 = 3x_2 \right\}$$

$$(c) U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq x_2 \right\} \quad (d) U_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 3x \\ 2x \\ -x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 2. Sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Seien weiterhin U, U_1, \dots, U_k Untervektorräume von V . Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

$$(a) U = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$$

$$(b) U = U_1 + \dots + U_k \text{ und für jedes } i \in \{1, \dots, k\} \text{ gilt:}$$

$$U_i \cap (U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k) = \{0\}$$

Aufgabe 3. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) Sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum, $(v_1, v_2, v_3, v_4) \in V^4$ linear unabhängig und $M_1 = (v_1, v_2, v_3)$, $M_2 = (v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 - v_3)$, $M_3 = (v_1 + 3v_3, v_2 + v_1, v_1 + v_3)$. Dann gibt es genau zwei $i \in \{1, 2, 3\}$, so dass M_i linear unabhängig ist.

(b) Sei K ein Körper. Dann ist $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^2 \mid x_1^2 + x_1 = 2 \right\}$ kein Untervektorraum von K^2 .

Aufgabe 4. Sei $V := \mathbb{R}[X]/\langle 3X^5 + X^3 + X \rangle$.

(a) Zeigen Sie, dass V mit der gewöhnlichen Addition und der durch

$$\mathbb{R} \times V \rightarrow V, (r, \bar{f}) \mapsto \overline{rf}$$

(wobei $f \in \mathbb{R}[X]$ und \bar{f} bzw. \overline{rf} die Äquivalenzklasse von f bzw. rf in V bezeichne) definierten Skalarmultiplikation ein \mathbb{R} -Vektorraum ist.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von V .

Hinweis: Division mit Rest ist hilfreich.