Technische Universität Kaiserslautern

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Mathematik für Informatiker: Algebraische Strukturen

Wintersemester 2016 - Übungsblatt 7

Abgabetermin: 16.12.2016, 8:15h

Aufgabe 1.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}_{>1}$. Charakterisieren Sie $\mathbb{Z}_n^*$ mittels größter gemeinsamer Teiler geeigneter Zahlen in $\mathbb{Z}$.

(b) Sei $R = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]/\langle X^n \rangle$ (mit $n \in \mathbb{N}_{>0}$) und $f = \sum_{i=0}^{s} f_i X^i \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$.

  (i) Zeigen Sie: Es gilt $\bar{f} = \bar{0}$ in R genau dann wenn $f_i = 0$ für alle $0 \leq i \leq n-1$.

  (ii) Zeigen Sie, dass $|R| = 5^n$ gilt.
  Hinweis: Divison mit Rest.

  (iii) Zeigen Sie: $\bar{f}$ ist genau dann ein Nullteiler in R, wenn $f_0 = 0$ gilt. Wie viele Nullteiler gibt es in R?

  (iv) Bestimmen Sie alle Einheiten in R.

Aufgabe 2.

(a) Sei R ein Integritätsbereich und $a, b \in R$. Zeigen Sie:

  (i) $g \in \mathrm{ggT}(a, b) \Leftrightarrow \langle g \rangle$ ist das minimale Hauptideal, das $\langle a, b \rangle$ enthält

  (ii) $k \in \mathrm{kgV}(a, b) \Leftrightarrow \langle k \rangle$ ist das maximale Hauptideal, das in $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle$ enthalten ist

  Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, was minimales/maximales Hauptideal in diesem Kontext bedeutet.

(b) (Präsenzaufgabenteil) Sei R ein euklidischer Ring. Zeigen Sie:

$$g \in \mathrm{ggT}(a, b) \Leftrightarrow \langle a, b \rangle = \langle g \rangle.$$

Folgern Sie daraus, dass jedes endlich erzeugte Ideal in R ein Hauptideal ist. Ist jedes Ideal in R ein Hauptideal?

Aufgabe 3. Benutzen Sie den euklidischen Algorithmus, um einen größten gemeinsamen Teiler von $f = 2x^6 + 2x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ und $g = x^6 + x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1$ in $\mathbb{R}[x]$ zu bestimmen und diesen als Linearkombination von f und g darzustellen.
Hinweis: Führen Sie die einzelnen Schritte des euklidischen Algorithmus explizit auf Ihrer Abgabe aus.