Technische Universität Kaiserslautern

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Mathematik für Informatiker: Algebraische Strukturen

Wintersemester 2016 - Übungsblatt 6

Abgabetermin: 9.12.2016, 8:15h

Aufgabe 1. Sei R ein Ring und $f \in R[X]$. Dann heißt

$$\deg(f) := \begin{cases} \max\{i \in \mathbb{N} \mid f_i \neq 0\}, & f \neq 0 \\ -\infty, & f = 0 \end{cases}$$

der Grad von f. Beweisen Sie:

(a) Die Multiplikation in $R[X]$ ist in der Tat assoziativ: $(f\cdot g)\cdot h = f\cdot(g\cdot h)$ für alle $f, g, h \in R[X]$.

(b) Es gilt die Gradformel $\deg(f) + \deg(g) = \deg(fg)$ für alle $f, g \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$.

(c) Es existieren Polynome $f, g \in (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})[X] \setminus \{0\}$ mit $\deg(f) + \deg(g) \neq \deg(fg)$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

(a) $\langle 5, 7\rangle$ und $\langle 6, 9\rangle$ sind Hauptideale in $\mathbb{Z}$.

(b) $\langle 2, X\rangle \subset \mathbb{Z}[X]$ ist kein Hauptideal.
Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 1(b).

Aufgabe 3.

(a) Betrachten Sie die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]/\langle X^4\rangle, \quad \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mapsto \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i X^{2i}}.$$

Zeigen Sie:

(i) φ ist ein Ringhomomorphismus.

(ii) (Präsenzaufgabenteil) Es gilt $\ker(\varphi) = \langle X^2\rangle$. Bestimmen Sie außerdem $\operatorname{im}(\varphi)$.

(b) Seien $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$. Bestimmen Sie alle Ringhomomorphismen von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.