TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Mathematik für Informatiker: Algebraische Strukturen

Wintersemester 2016/17 - Übungsblatt 4

Abgabetermin: 25.11.2016, 8:15h

Aufgabe 1. Überprüfen Sie, ob folgende Teilmengen U Untergruppen der Gruppe G sind.

(a) G das Produkt von $(\mathbb{Z}, +)$ und $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ und $U = \{(a, b) \in G \mid b = 2^a\}$.
Hinweis: Seien $(G, \cdot)$ und $(H, \circ)$ zwei Gruppen. Das Produkt $(G, \cdot) \times (H, \circ)$ ist die Menge $G \times H$ mit der Verknüpfung

$$* : (G \times H) \to (G \times H), ((g, h), (g', h')) \to (g \cdot g', h \circ h').$$

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass das Produkt zweier Gruppen eine Gruppe ist.

(b) $G = S_4$ und $U = \{\sigma \in S_4 \mid \sigma^2 = (1)\}$.

(c) $G = (\mathbb{R}, +) \times (\mathbb{R}, +)$ und $U = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = ax^2 + bx + c\}$ für gegebene $a, b, c \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Ob U eine Untergruppe von G ist, hängt von der Wahl der Parameter a, b und c ab. Sie müssen untersuchen, für welche Wahlen der Parameter die Menge U eine Untergruppe ist und für welche nicht (und dies dann natürlich auch beweisen).

(d) $(G, \circ)$ eine beliebige Gruppe, $V \subseteq G$ eine Untergruppe, $a \in G$ und $U = a \circ V \circ a^{-1} = \{a \circ v \circ a^{-1} \mid v \in V\}$.

Aufgabe 2. Untersuchen Sie, ob die folgenden Abbildungen f Homomorphismen sind und bestimmen Sie $\ker(f)$ und $\mathrm{im}(f)$ falls f ein Homomorphismus ist:

(a) $f : (\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}, +)$, $f(x, y) = (4x - 5y, 10y - 8x)$

(b) $f : (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot) \to (\mathbb{Q}, +), f(x) = x$

Aufgabe 3.

(a) Sei $f : M \to N$ eine Abbildung zwischen zwei nicht-leeren Mengen M und N. Wir definieren für $m_1, m_2 \in M$

$$m_1 \sim m_2 :\Leftrightarrow f(m_1) = f(m_2).$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M definiert. (Wir nennen diese Äquivalenzrelation *Bildgleichheits-Äquivalenzrelation bezüglich* f.)

(b) (freiwilliger Zusatzaufgabenteil) Zeigen Sie: Jede Äquivalenzrelation $\sim'$ auf einer nicht-leeren Menge M' kann als Bildgleichheits-Äquivalenzrelation bezüglich einer geeigneten Abbildung g dargestellt werden.
Hinweis: Die Zielmenge der Abbildung g muss natürlich von M' und $\sim'$ abhängen.

(c) Sei M eine nicht-leere Menge und $\sim_1$ und $\sim_2$ zwei Äquivalenzrelationen auf M. Wir definieren für $a, b \in M$

$$a \sim_\vee b :\Leftrightarrow (a \sim_1 b \ \vee \ a \sim_2 b)$$

und

$$a \sim_\wedge b :\Leftrightarrow (a \sim_1 b \ \wedge \ a \sim_2 b)\,.$$

Untersuchen Sie, ob die Relationen $\sim_\vee$ and $\sim_\wedge$ Äquivalenzrelationen sind.

Aufgabe 4. (Präsenzaufgabe - keine Abgabe) Sei $(G, *)$ eine Gruppe, $M \subset G$ eine nicht-leere Teilmenge. Zeigen Sie :

$$\langle M \rangle = \{g_1^{\alpha_1} * \cdots * g_n^{\alpha_n} \mid n \in \mathbb{N}, g_1, \ldots, g_n \in M, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z}\}.$$