Technische Universität Kaiserslautern

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Mathematik für Informatiker: Algebraische Strukturen

Wintersemester 2016/17 - Übungsblatt 2

Abgabetermin: 11.11.2016, 8:15h

Aufgabe 1. Untersuchen Sie, ob die folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind und geben Sie jeweils Linksinverse, Rechtsinverse und Umkehrabbildung an falls diese exisitieren.

(a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 3x + 2$

(b) $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : x \mapsto 3x + 2$

(c) $f_3 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (xy, x + 1)$

(d) $f_4 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (x - y, x + y)$

(e) $f_5 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 11x + 5y$

Erinnerung: Seien $f : M \to N$ und $g : N \to M$ zwei Abbildungen. Wir nennen g

- *eine Linksinverse zu f, falls $g \circ f = \mathrm{id}_M$;*
- *eine Rechtsinverse zu f, falls $f \circ g = \mathrm{id}_N$.*

Aufgabe 2.

(a) Wir betrachten die Abbildungen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, z \mapsto 3z + 2$ und $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, z \mapsto (z, z^2 - 12z - 49)$.

  (i) Zeigen Sie, dass g injektiv ist .

  (ii) Geben Sie die Komposition von f und g an.

(b) Seien A, B und C Mengen sowie $f : A \to B$ und $g : B \to C$ zwei injektive Abbildungen. Zeigen Sie, dass dann auch die Komposition $g \circ f : A \to C$ injektiv ist.

Aufgabe 3. Seien M und N zwei endliche Mengen gleicher Mächtigkeit (d.h. $|M| = |N|$). Zeigen Sie, dass für eine Abbildung $f : M \to N$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) f ist injektiv.

(b) f ist surjektiv.

(c) f ist bijektiv.

Gilt diese Äquivalenz auch falls M und N nicht endlich sind?

Aufgabe 4. (Präsenzaufgabe - keine Abgabe)

(a) Wir betrachten die Abbildung $f : \{1, 2\} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (a, b) \mapsto 2a - b$, sowie die Mengen $A = \{1, 2\} \times \{1, 2\}$ und $B = \{1, 2\}$. Bestimmen Sie das Bild $f(A)$ und das Urbild $f^{-1}(B)$.

(b) Wir betrachten die Abbildung $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (a, b) \mapsto 2a - 3b$. Bestimmen Sie das Bild $g(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ und das Urbild $g^{-1}(\{0\})$.