

Mathematik für Informatiker: Algebraische Strukturen

Wintersemester 2016/17 - Übungsblatt 11

Abgabetermin: 27.1.2017, 8:15h

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 9x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_3 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

\mathbb{R} -linear ist. Bestimmen Sie außerdem jeweils eine Basis von $\text{Ker}(f)$ und $\text{Im}(f)$.

Aufgabe 2. Seien die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ und

$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}, w_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Bestimmen Sie die \mathbb{R} -lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(v_i) = w_i$ für $i = 1, \dots, 4$.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum mit Basis (v_1, \dots, v_n) und W ein zu V isomorpher K -Vektorraum.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi : \{f : V \rightarrow W \text{ } K\text{-Vektorraumisomorphismus}\} \rightarrow \{C \text{ Basis von } W\} \\ f \mapsto (f(v_1), \dots, f(v_n))$$

wohldefiniert ist (d.h., dass $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ in der Tat eine Basis von W ist).

(b) Zeigen Sie, dass Abbildung

$$\Psi : \{C \text{ Basis von } W\} \rightarrow \{f : V \rightarrow W \text{ } K\text{-Vektorraumisomorphismus}\} \\ C := (w_1, \dots, w_n) \mapsto (\text{die eindeutig bestimmte } K\text{-lineare Abbildung } f : V \rightarrow W \text{ mit } f(v_i) = w_i)$$

wohldefiniert ist (d.h., dass f in der Tat ein K -Vektorraumisomorphismus ist).

(c) Zeigen Sie, dass Φ die Umkehrabbildung von Ψ ist.