TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

# Mathematik für Informatiker: Algebraische Strukturen

Wintersemester 2016/17 - Übungsblatt 10

Abgabetermin: 20.1.2017, 8:15h

**Aufgabe 1.** Sei $K$ ein Körper, $V$ ein endlich-dimensionaler $K$-Vektorraum und $V_1, V_2 \subset V$ zwei $K$-Untervektorräume von $V$. Beweisen Sie folgende Dimensionsformel:

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2).$$

*Hinweis: Gehen Sie wie folgt vor: Wählen Sie eine Basis $B = (b_1, \ldots, b_r)$ von $V_1 \cap V_2$ (warum existiert eine solche Basis?). Ergänzen Sie $B$ zu einer Basis $B_1$ von $V_1$ und zu einer Basis $B_2$ von $V_2$ (warum ist das möglich?). Zeigen Sie nun, dass $B_1 \cup B_2$ eine Basis von $V_1 + V_2$ ist. Leiten Sie daraus die Dimensionsformel ab.*

**Aufgabe 2.** Bestimmen Sie die Lösungsmenge $L_{(A|b)} \subset \mathbb{R}^6$ des durch die erweiterte Matrix

$$(A|b) = \left(\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 8 & 2 & -4 & 2 & -4 \\ -4 & -3 & -4 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{4\times(6+1)}$$

gegebenen linearen Gleichungssystems.

**Aufgabe 3.** Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Wir betrachten das durch die erweiterte Matrix

$$(A|b) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & 8 & -1 \\ 1 & 4 & 8 & 8 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 2 & 19 \end{array}\right) \in \mathbb{F}_p^{4\times(4+1)}$$

gegebene lineare Gleichungssystem über $\mathbb{F}_p$. Für welche Primzahlen $p$ ist dieses lineare Gleichungssystem lösbar? Bestimmen Sie in diesen Fällen die Lösungsmenge.