TECHNISCHE UNIVERSITÄT
KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Klausur Mathematik für Informatiker: Algebraische Strukturen

Sommersemester 2015

3.9.2015, 8:15–10:30 Uhr

Alle Antworten sowie alle nicht offensichtlichen Rechen-/Beweisschritte sind zu begründen. Resultate und Aussagen aus Vorlesung und Übungen dürfen benutzt werden, müssen dazu aber konkret benannt (z.B. „nach dem Homomorphiesatz für Gruppen“ oder „nach Satz 2.8“) oder formuliert werden.

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)**.**

(a) Ist $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_1 + x_2^2 + x_2 = 0 \right\}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum?

(b) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $V_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 3x_2 = \lambda \right\}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum?

Bonusfrage: Was ändert sich (und was bleibt gleich) falls $\mathbb{R}$ durch den Körper $\mathbb{F}_2$ ersetzt wird? (2 Bonuspunkte)

Aufgabe 2 (1+1+2+1+2 Punkte)**.** Wir betrachten den folgenden Code in $\mathbb{F}_2^9$:

$$C = \left\{ x \in \mathbb{F}_2^9 : \begin{array}{ccc} x_6 + x_9 & = & x_1 \\ x_5 + x_6 + x_8 & = & x_2 \\ x_5 + x_7 + x_8 + x_9 & = & x_3 \\ x_6 + x_7 + x_8 & = & x_4 \end{array} \right\}$$

(a) Bestimmen Sie eine Kontrollmatrix H von C.

(b) Bestimmen Sie eine Generatorenmatrix G von C.

(c) Bestimmen Sie den Minimalabstand von C.

(d) Für welche $t \in \mathbb{N}_{>0}$ ist C t-fehlerkorrigierend?

(e) Für welche $t \in \mathbb{N}_{>0}$ ist C t-perfekt?

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** Bestimmen Sie **alle** Lösungen $x \in \mathbb{Z}$ des Kongruenzgleichungssystems (Lösungen und Zwischenergebnisse durch Ausprobieren werden nicht akzeptiert):

$$\begin{array}{rcrl} x & \equiv & -3 & \pmod{5} \\ x & \equiv & 4 & \pmod{13} \end{array}$$

Aufgabe 4 (5+2 Punkte)**.**

(a) Betrachten Sie die $\mathbb{R}$-Unterräume

$$U = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\5\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\8\\5\end{pmatrix} \right\rangle \text{ und } U' = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{rcl} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 9x_4 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 9x_4 & = & 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 & = & 0 \end{array} \right\}$$

von $\mathbb{R}^4$. Berechnen Sie Basen von U und U'.

(b) Seien V und V' zwei $\mathbb{F}_3$-Unterräume von $\mathbb{F}_3^4$ mit $V + V' = \mathbb{F}_3^4$. Außerdem gelte für die Mächtigkeiten $|V| = 9$ und $|V'| = 27$. Bestimmen Sie die Mächtigkeit $|V \cap V'|$.

Aufgabe 5 (3+2+2 Punkte)**.** Der Faktorring $V := \mathbb{R}[X]/\langle X^3 + X + 1\rangle$ ist mit der gewöhnlichen Addition und der durch

$$\mathbb{R} \times V \to V,\ (r, \bar{f}) \mapsto \bar{r} \cdot \bar{f}$$

(wobei $f \in \mathbb{R}[X]$ und $\bar{f}$ bzw. $\bar{r}$ die Äquivalenzklasse von f bzw. r in V bezeichne) definierten Skalarmultiplikation ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. (Sie brauchen dies **nicht** nachzuweisen.)

(a) Zeigen Sie, dass $B := (\bar{1}, \bar{X}, \bar{X}^2)$ eine $\mathbb{R}$-Basis von V ist.

(b) Stellen Sie $\bar{f} \cdot \bar{g}$ als Linearkombination der Basisvektoren in B dar, wobei $f = X^{10} + X^8 + X^7 + X + 1$ und $g = 2X^2 + 3X + 2$.

(c) Betrachten Sie die Abbildung

$$\psi : V \to V,\ \bar{f} \mapsto \bar{X} \cdot \bar{f}.$$

Sie dürfen (ohne Beweis) annehmen, dass die Abbildung wohldefiniert und $\mathbb{R}$-linear ist. Berechnen Sie die Matrixdarstellung $M_{B,B}(\psi)$ von ψ.

Aufgabe 6 (4+2 Punkte)**.**

(a) Berechnen Sie das Bild und den Kern der Abbildung $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ (a, b) \mapsto 4a - 6b$.

(b) Seien M, N und P Mengen und $f : M \to N$ und $g : N \to P$ surjektive Abbildungen. Zeigen Sie, dass dann auch $g \circ f$ surjektiv ist.

Aufgabe 7 (2+3 Punkte)**.**

(a) Bestimmen Sie alle Einheiten und alle Nullteiler des Rings $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

(b) Gibt es einen Gruppenhomomorphismus $\psi : \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ mit $\psi(\bar{1}) = \bar{3}$?