TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Prof. Dr. Mathias Schulze
Dipl.-Math. Cornelia Rottner
Fachbereich Mathematik

Elementare Zahlentheorie

Sommersemester 2016 - 1.Übungsblatt

Abgabetermin: 28.4.2016, 16:00h

Aufgabe 1. Es seien $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{Z}$ ganze Zahlen. Zeigen Sie:

(a) Ist $g \in \mathrm{ggT}(z_1, \ldots, z_n)$, so ist $\mathrm{ggT}(z_1, \ldots, z_n) = \{g, -g\}$.

(b) Wenn nicht alle z_i Null sind, dann gilt

$$\mathrm{ggt}(z_1, \ldots, z_n) := \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min\{n_p(z_1), \ldots, n_p(z_n)\}} \in \mathrm{ggT}(z_1. \ldots, z_n).$$

(c) $|z_1 \cdot z_2| = \mathrm{kgv}(z_1, z_2) \cdot \mathrm{ggt}(z_1, z_2)$.

Aufgabe 2. Sind folgende lineare diophantische Gleichungen lösbar? Bestimmen Sie gegebenenfalls eine Lösung.

(a) $84 \cdot x_1 + 60 \cdot x_2 + 210 \cdot x_3 = 18$

(b) $63 \cdot x_1 + 81 \cdot x_2 + 24 \cdot x_3 = 16$

Hinweis: Lösungen und Zwischenergebnisse durch Ausprobieren werden nicht akzeptiert.

Aufgabe 3. Es seien $c_0, c_1, c_2, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ mit $c_1, c_2 \neq 0$, $\mathrm{ggt}(c_1, c_2) | c_0$ und $\mathrm{ggt}(c_1, c_2) = a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_2$. Zeigen Sie: Genau dann ist $(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$ eine Lösung der diophantischen Gleichung

$$c_0 = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2$$

wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass

$$z_1 = \frac{c_0 \cdot a_1}{\mathrm{ggt}(c_1, c_2)} + \frac{c_2 \cdot k}{\mathrm{ggt}(c_1, c_2)} \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{c_0 \cdot a_2}{\mathrm{ggt}(c_1, c_2)} - \frac{c_1 \cdot k}{\mathrm{ggt}(c_1, c_2)}.$$

Aufgabe 4. Für eine positive ganze Zahl $z \in \mathbb{Z}_{>0}$ bezeichnen wir mit

$$\tau(z) = \left| \left\{ d \in \mathbb{Z}_{>0} \;\middle|\; d \mid z \right\} \right|$$

die Anzahl der positiven Teiler von z, und mit

$$P(z) = \prod_{\substack{1 \leq d \leq z \\ d | z}} d$$

das Produkt aller positiven Teiler. Zeigen Sie:

$$\tau(z) = \prod_{p \in \mathbb{P}} (n_p(z) + 1)$$

und

$$P(z) = z^{\frac{\tau(z)}{2}}.$$